Лекция 10 февраля (вторая половина)

$A \longrightarrow A^{op} \longleftarrow$ алгебра, где умножение происходит в обратном порядке.

$a_1 \underset{op}{\circ} a_2 := a_2 a_1$

$\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^{op}$

$\boxed{\text{Обращение стрелок}}$

$Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$

$Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) := Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$

$\varphi \underset{\mathcal{C}^{op}}{\circ} \psi := \underset{\mathcal{C}}{\psi\varphi}$

$A \xrightarrow{\varphi} B$ антигомоморфизм

‖

гомоморфизм $A^{op} \to B$

$\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_2)\varphi(a_1)$

Предпучок (объектов категории $\mathcal{D}$) на категории $\mathcal{C}$

‖

Контравариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$

||def

функтор $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$

$F: Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$

$\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ $F: Hom(X,Y) \to Hom(FY, FX)$

$F(\varphi\psi) = F(\psi)F(\varphi)$

когда $\varphi\psi$ определено.

Примеры: Триангулированое пространсво

$\parallel$

предпучок $X: \Delta_s^{op} \to Set$

$X: [n] \longrightarrow X_n$ множество = множество n-мерных симплексов.

название граней конкретного кусочки $\Delta^m \in X_m$ $\longrightarrow$ $\varphi: [n] \hookrightarrow [m]$

у Δ_s выбор конкретной n-мерной грани в m-мерном симплексе

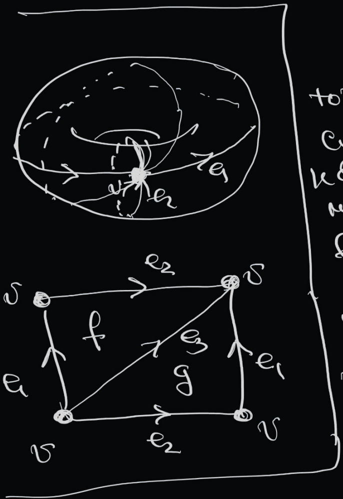
$\Delta_s \subset \Delta$ подкатегория, где объекты те же, а стрелки $[n] \hookrightarrow [m]$ строго возрастающие

ПОЛУСИМПЛ. КАТ-Я

φ — название для них

$[n] \xrightarrow{\varphi} [m]$ $\quad X_\varphi : X_n \longleftarrow X_m$

правило склейки



$X_\varphi(x) \in X_n$ это тот правильный n-мерный симплекс, который надо подклеить к m-мерному симплексу x в качестве φ-той n-мерной грани

Пример: Триангуляция торе двумя Треугольниками

$X_0 = \{v\}$ $\quad [0]$

$X_1 = \{e_1, e_2, e_3)$

$X_2 = \{f\, g\}$

$[0\ 1]$

$[0\ 1\ 2]$ стрелки ведут из меньших в большие $\quad [0 \to 1]$

$\partial_0^0 : [0] \to [0\ 1]$ $\quad 0 \mapsto 1$ $\qquad |\partial_0^0| = |\partial_0^1| : X_1 \to X_0$

$\partial_1^0 : [0] \to [0\ 1]$ $\quad 0 \mapsto 1$ $\qquad e_1, e_2, e_3 \longrightarrow v$

$X_n \longleftarrow X_n$

$[0\ 1\ 2]$

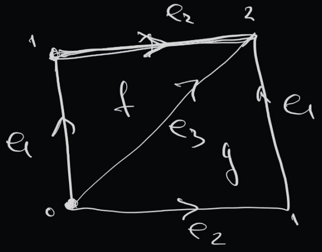
$\partial_0^1 :$ $\quad \underline{12}$ $\qquad \underline{|\partial_0^1|} : X_2 \longrightarrow X_1$

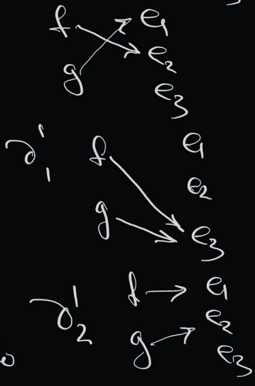
$\begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix}$

$\partial_1^1 : \underline{[0, 1]} \to \underline{[0\ 1\ 2]}$ $\underline{02}$

∂_2^2 :

$\underline{\underline{01}}$





Триангулированное пр-во

контравар. функтор $\Delta_S^{op} \longrightarrow Set$

$[n] \longrightarrow X_n$

Контравар. функтор $\Delta^{op} \longrightarrow Set$.

"обобщённые триангуляции"

симплициальное множество

$[n] \longrightarrow \underbrace{X_n \times \Delta^n}$

коробка с правильными симплексами

$\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ правильный симпл.

$[n] \xrightarrow{\varphi} [m]$

в категории Δ

$\boxed{\varphi_* : \Delta^n \longrightarrow \Delta^m}$

действует на базис так, как требует $\underline{\varphi}$

$(x, s) \subset X_n \times \Delta^n$

имя симплекса

тип x-того симплекса

$e_i \mapsto e_{\varphi(i)}$

$\varphi_* : \Delta^n \longrightarrow \Delta^m$

$X_n \longleftarrow X_m : \varphi^*$

$\varphi^* = X\varphi : X_m \longrightarrow X_n$

правило склейки

$(x, \varphi_*(s))$

$(\varphi^* x, s)$

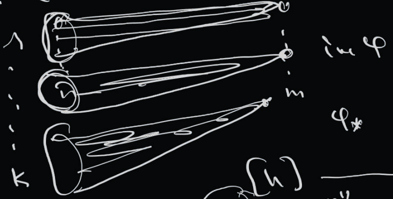
$X_m \times \Delta^m$

коробки m-мерных симплексов

$X_n \times \Delta^n$

коробки n-мерных симп.

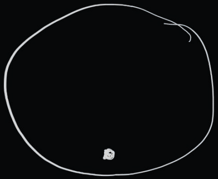
$\varphi : [n] \longrightarrow [m]$



∀φ ∃! разложение

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads, "\varphi''_*"'] & & {[m]} \\
& {[k]} \arrow[ur, hook, "\varphi'_*"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \arrow[r] \arrow[d, bend right] & \Delta^k \arrow[r, bend right] & \Delta^m \\
x \bullet X_n & & X_m \arrow[ll, "\varphi^*"'] \arrow[dl, "\varphi'^*"] \\
& X_k \arrow[ul, "\varphi''^*"] &
\end{tikzcd}$$



$S^n = \Delta^n / \partial\Delta^n$

$X_k = \mathrm{Hom}_\Delta([k],[n])$ / неэпиморфные считаем одной точкой

$$\begin{tikzcd} & n & & n \\ {[k_1]} \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi"] & & {[k_2]} \arrow[ur, "\xi"] & \end{tikzcd}$$

$\varphi^* : X_{k_2} \longrightarrow X_{k_1}$

$\mathrm{Hom}([k_2],[n]) \qquad \mathrm{Hom}([k_1],[n])$

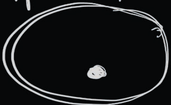
$\xi \longmapsto \xi\varphi$

Так заданный функтор $\Delta \longrightarrow \mathrm{Set}$

$\mathrm{Hom}(*,[n])$ / неэп.

$[k] \to \mathrm{Hom}[k][n]$

Задаёт 1-клеточную триангуляцию сферы S^n



Упражнение

Пример 2 : $V \longrightarrow V^*$

двойственность

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(\ ,k)$ $\qquad \textcircled{k}$

$W \longrightarrow \mathrm{Hom}(W,k)$.

$$\mathrm{Vect}^{op} \longrightarrow \mathrm{Vect}$$

$$\begin{tikzcd}
W_1 \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \arrow[d, "\xi"] \\
 & \mathbb{k}
\end{tikzcd}$$

$\varphi^*: W_2^* \to W_1^*$

$\xi \longmapsto \xi\varphi$

правое умножение на φ

Пример 3: Δ - конечные упор. множества.

∇ - конечные упорядоченные множества, где есть наибольший элемент, наим. элемент, они разные, и морфизмы переводят наиб. в наиб. а наим. в наим. и сохраняют порядок

$\nabla < \Delta$

$[1] < \mathrm{Ob}\nabla < \mathrm{Ob}$.

$$\begin{array}{c} [1] \\ \| \\ \{0,1\} \end{array}$$

$\mathrm{Hom}(\ \ , [1])$.

$\mathrm{Hom}_\Delta(*\ [1])$

$$\Delta \longrightarrow \nabla$$

← — — —

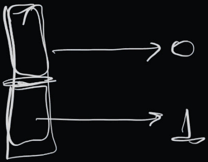
$\varphi: [k] \to [1]$

φ_1

φ_2

$\mathrm{Hom}(\quad [1])$ ∇

на $\mathrm{Hom}(*, [1])$ есть канонический порядок (поточечное сравнение).



$\mathrm{Hom}(\quad [1])$ это дедекиндовы сечения

$X \longrightarrow$ множество разбиений

Пример: Эти получим слова "предпучок".

X – топ. пр-во

$\mathcal{U}(X)$ – категория открытых множеств.

Предпучок (множеств, алгебр, векторных пространств) на $\mathcal{U}(X)$

$$F : \mathcal{U}(X)^{opp} \longrightarrow \begin{matrix} Set \\ Alg \\ Vect. \end{matrix}$$

$U \longrightarrow$ множество $F(U)$
(сечений? F над U)
$S \longrightarrow S|_U$

$U \subset W$ $\quad F(W) \longrightarrow F(U)$
ограничение сечений

функтор = ограничение ограничения это ограничение

$U \subset V \subset W$ $\quad s \in F(W)$ $\quad S|_V\big|_U = S|_U$

Примеры: X, Y – топ. пр-ва

предпучок локальных? отображений из X в Y

$\underline{\underline{F(U)}}$ = непрерывные $\varphi : U \to Y$

$U \subset W$ $\quad F(W)$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ U \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[ur, "\varphi|_U"'] & \end{tikzcd}$$

Специализации !

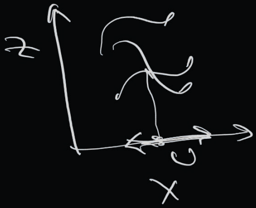
$$Y = X \times Z \xrightarrow{\pi} X$$

$$X \supset U \xrightarrow{\varphi} X \times Z$$

$$\forall x \in U \quad \pi(\varphi(x)) = x$$

лок. сечение произведения

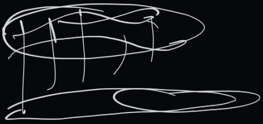
$F(U)$



$Z = \mathbb{R}$

Пучок локальных функций $X \to \mathbb{R}$

$F(U)$ - это функции $U \to \mathbb{R}$

Структурные предпучки : гладкие функции, непрерывные ф-ии и т.д.