Лекция 24 февраля (первая половина)

Сопряжённые функторы

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"]
\end{tikzcd}$$

F наз. сопряжённым слева функтору G (G наз. сопряжённым справа к F), если имеется естественный по X и Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

Hom = "скалярное произведение"

Если F и G сопряжены, то возникают естественные преобразования

$$s: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF \qquad t: FG \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FX) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GFX)$$

$$\mathrm{Id}_{FX} \longrightarrow s_X: X \to GFX$$

действие s над X.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GY, GY) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGY, Y)$$

$$\mathrm{Id}_{GY} \longrightarrow t_Y: FGY \to Y$$

действие t над Y.

Примеры: $R\text{-mod}$ модули над кольцом R

$$G : R\text{-mod} \longrightarrow Sets$$

забывание структуры

Сопряжённый слева $F : Sets \longrightarrow R\text{-mod}$

$M \longmapsto R \otimes M$ ← свободный модуль с базисом M.

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-mod}}(R \otimes M, N) \simeq \mathrm{Hom}_{Sets}(M, \underset{\substack{\shortparallel \\ GN}}{N})$$

$$s : Id_{Sets} \longrightarrow GF$$

$s_M : M \longrightarrow R \otimes M$ вложение множества базисных векторов в свободный модуль.

M – множество

$t_N : R \otimes N \longrightarrow N$ ← огромный свободный модуль с базисом N

N – R-модуль.

базисный вектор $[n]$ ⟼ вектор $n \in N$

$$\sum x_n [n] \longmapsto \sum x_n n \in N$$

$\boxed{R = \mathbb{R} \quad N = \mathbb{R}}$

$\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$ – свободный модуль с континуумом образующих

$\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)\cdot[x]$ $\quad$ $f(x)\neq 0$ только для конечного множества $x\in\mathbb{R}$

Функции $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с конечным носителем

$$t: f(x) \longrightarrow \underline{\underline{\sum_{x\in\mathbb{R}} x f(x)}} \in R$$

$$\mathbb{R}\otimes\mathbb{R} \longrightarrow R$$

$(u,w) = (\underbrace{Fu}_{u'}, Fw)$ $\quad$ $F^{*} = F^{-1}$

$(F^{-1}u', w) = (u', Fw)$ $\quad$ изометрия в линейной алгебре сопряжен обратной изометрии

$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ квазиобратные эквивалентности категорий, т.е. имеются естественные изоморфизмы

$\boxed{f: Id_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} GF}$ $\quad$ $g: FG \longrightarrow Id_{\mathcal{D}}$

$Hom(FX, Y) \xrightarrow{\sim} Hom(X, GY)$

естественный по X и Y $\quad$ $X \to GY$

$\nearrow f_X^* G\varphi := G\varphi \circ f_X$

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[rd, squiggly, "G"] & \\ & & GFX \arrow[r, "G\varphi"] & GY \\ & X \arrow[ur, "f_X"'] & & \end{tikzcd}$$

Это биекция, поскольку она композиция двух биекций: $G : \mathrm{Hom}(FX, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(GFX, GY)$

т.к. G вполне строг. (поскольку G экв-ть).

$$f_X^* : \mathrm{Hom}(GFX, GY) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X, GY)$$

т.к. f_X — обратимая стрелка, то f_X^* — правое умножение на f_X — обратимо

Упр: Симм. рассуждение с изоморфизмом $FG \longrightarrow \mathrm{Id}_D$ показывает, что

$$\mathrm{Hom}(GY, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y, FX)$$

квазиобратные друг другу эквивалентности сопряжены друг другу с обеих сторон.

Ут1. Функтор F сопряжён слева функтору G

$$\begin{tikzcd}\mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "G"]\end{tikzcd}$$

тогда и только тогда, когда $\exists$ естественные преобразования

$$\underline{\underline{s : Id_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF}} \qquad \underline{\underline{t : FG \longrightarrow Id_{\mathcal{D}}}}$$

такие что $F \xrightarrow{\underline{F \circ s}} FGF \xrightarrow{\underline{t \circ F}} F = Id_F$

$$s_x : Id \xrightarrow{s} GF$$

$$F \swarrow \quad X \to GFX \qquad FG \xrightarrow{t} Id$$

$$FX \xrightarrow{Fs} FGFX \qquad t_{Fx} : \underline{\underline{FGFx \to Fx}}$$

и $\qquad G \xrightarrow{sG} GFG \xrightarrow{Gt} G = Id_G$

$$FG \xrightarrow{t} Id$$

$$s_{GY} : G(Y) \to GFG(Y)$$

Идея проверки : $Hom(FX, Y) \xleftarrow{\lambda} Hom(X, GY)$

естественный?

$$\forall \ \varphi : X_1 \longrightarrow X_2$$

коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(FX_1, Y) & \mathrm{Hom}(X_1, GY) \arrow[l, "\lambda"'] \\
\mathrm{Hom}(FX_2, Y) \arrow[u, "F\varphi^*"] & \mathrm{Hom}(X_2, GY) \arrow[l, "\lambda"] \arrow[u, "\varphi^*"']
\end{tikzcd}$$

В частности, если взять $Y = F(X)$, $X_1 = X$, $X_2 = GFX$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F(X), F(X)) & \mathrm{Id}_{FX} & \mathrm{Hom}(X, GFX) \arrow[ll, "\lambda"'] & S_X \\
\mathrm{Hom}(FGFX, F(X)) \arrow[u, "FS_X^*"] & & \mathrm{Hom}(GFX, GFX) \arrow[ll, "\lambda"] \arrow[u, "S_X^*"] & \ni \mathrm{Id} \arrow[u] \\
& t_{FX} \arrow[uu] & & \mathrm{Id}_{FX} \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\varphi = S_X : X \to GFX}$$

$$\underline{\mathrm{Id}_{FX}} = \lambda(S_X) = \lambda S_X^*(\mathrm{Id}_{GFX}) =$$
$$= F(S_X)^*(t_{FX}) = \underline{t_{FX} \circ F(S_X)}$$

окончание док-ва — задачи из листка 8

Чтобы у функтора $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ был левый сопряжённый $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

$$\underline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)}$$

необходимо и достаточно, чтобы функтор

$$h^X_G : \mathcal{D} \longrightarrow Sets$$

$$Y \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

был представим ($\exists$ объект FX : $h^X_G = h^{FX}$) для всех $X \in Ob\,\mathcal{C}$.

Док-во: если сопряжённый функтор есть, то очевидно, что FX представляет h^X_G. В другую сторону: зададим действие F на объектах правилом $X \longrightarrow FX$ где FX представляет h^X_G.

$$X_1 \xrightarrow{\varphi} X_2 \rightsquigarrow F(X_1) \longrightarrow F(X_2)$$

$$\begin{tikzcd}
h^{X_1}_G : Y \to Hom(X_1, GY) \\
h^{X_2}_G : Y \to Hom(X_2, GY) \arrow[u, "\varphi^*"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
h^{FX_1} \arrow[r, "\varphi_{X_1}", "\sim"'] & h^{X_1}_G \\
h^{FX_2} \arrow[r, "\varphi_{X_2}"'] & h^{X_2}_G \arrow[u, "\varphi^*"']
\end{tikzcd}$$

$$\longrightarrow \begin{tikzcd}
\underline{h^{FX_1}} \\
\underline{\underline{h^{FX_2}}} \arrow[u, "\varphi_{X_1}^{-1}\circ\varphi^*\circ\varphi_{X_2}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FX_1 \arrow[d, "\boxed{F\varphi}"] \\
FX_2
\end{tikzcd}$$

по лемме Йонеды

- Если сопряжённый функтор ∃ то он единствен с точностью до естественного изоморфизма
- Если функтор является эквивалентностью категорий, то сопряжённый ему функтор – тоже эквивалентность.