Лекция 24 февраля (вторая половина)

Важный пример

mod-R – правые R-модули

mod S – правые S-модули.

пусть N – это левый R-модуль.

∀ правого R-модуля M можно построить абелеву группу $M \underset{R}{\otimes} N$

$$\| $$

фактор $\dfrac{M\otimes N}{S} \leftarrow$ тензорное произведение абелевых групп ($\mathbb{Z}$-модулей)

$\uparrow$ подгруппа, порождённая разностями

$mr\otimes n - m\otimes rn$ $m\in M$, $n\in N$, $r\in R$ любые в $M \otimes_R N$ выполняются соотношения

$$mr \otimes_R n = m \otimes_R rn$$

R на $M \otimes_R N$ уже не действует

Допустим, что N кроме структуры левого R-модуля имеет структуру правого S-модуля

$$n \longrightarrow rns$$

и структуры левого R-модуля и правого S-модуля перестановочны

Такие N называются R-S бимодулями

На $M \otimes_R N$ есть структура правого S-модуля

$$* \otimes_R N : \text{Mod-}R \longrightarrow \text{Mod-}S$$

$$M \longmapsto M \otimes_R N$$

$$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \qquad \varphi \otimes Id : M_1 \otimes_R N \to M_2 \otimes_R N$$

$$(m \otimes_R n) \cdot s = m \otimes_R (ns) \qquad m \otimes_R n \to \varphi(m) \otimes_R n$$

$$\text{Mod-}R \longleftarrow \text{Mod-}S$$

$$\mathrm{Hom}_S(N,L) \longmapsfrom L$$

если N – это R-S бимодуль

↗ есть структура правого модуля над R

$$\underline{\varphi r(n) = \varphi(rn)}, \qquad \varphi : N \longrightarrow L$$

$\varphi(r_1 r_2) = (\varphi r_1) r_2$ это правое действие

$$\varphi r_1 r_2(n) = \varphi(r_1 r_2 n)$$

Теорема: $\exists$ естественный по $X \in \text{Mod-}R$ и по $Y \in \text{Mod-}S$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_S(\underline{X \otimes_R N}, Y) \simeq \mathrm{Hom}_R(X, \underline{\mathrm{Hom}_S(N,Y)})$$

отображение ⟶

$$\varphi : X \otimes_R N \longrightarrow Y \rightsquigarrow \{\varphi_x : N \to Y\}$$

S-линейно справа. семейство S-линейна справа

$x \in X$,

$$\boxed{\varphi_x(n) = \varphi(x \otimes_R n)}$$

и φ_x R-линейно справа зависит от x, т.е.

очевидно аддитивно по n, по x,

$$\varphi_{x_1 r_1 + x_2 r_2} = \varphi_{x_1} r_1 + \varphi_{x_2} r_2$$

$$\varphi_x(ns) = \varphi(x \underset{R}{\otimes} ns) = \varphi(x\otimes n)s$$

$$\varphi_{xr}(n) = \varphi(xr \underset{R}{\otimes} n) = \varphi(x\otimes rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi r)n$$

$$\begin{tikzcd} \psi : X \underset{R}{\otimes} N \longrightarrow Y & \{\psi_x : N \to Y\}_{x\in X} \arrow[l, "\text{отображение}"'] \end{tikzcd}$$

$$\psi(x\otimes n) = \psi_x(n)$$

Упр: проверить, что всё линейно, и эти отображения друг другу обратны.

Частный случай: пусть есть расширение ассоциативных $\Bbbk$-алгебр $A \subset B$

A-B бимодуль $N = B$

$S = B$

$R = A.$

$$\mathrm{Hom}_B(X \otimes_A B, Y) \simeq \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_B(B,Y))$$

функториально по A-модулю X и B-модулю Y

$$\mathrm{Hom}_B(B,Y) \simeq Y$$ для B-модуля Y

$\varphi : B \to Y \longrightarrow \varphi(1) \in Y$ как A-модуль это $\mathrm{res}_A Y$

забывает про B.

$$\mathrm{Hom}_B(X \otimes_A B, Y) = \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{res}_A Y)$$

индуцированный A-модулем X B-модуль.

индуцирование представлений — левый сопряжённый функтор к ограничению.

Можно положить $N = R = B$, $S = A$ ← B-A бимодуль

$$\mathrm{Hom}_A(X \otimes_B B, Y) = \mathrm{Hom}_B(X, \mathrm{Hom}_A(B,Y))$$

$x\otimes b \longrightarrow xb$

$X\otimes_B B \cong X$

как A-модуль с правым действием A

это $\mathrm{res}_A X$

$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{res}_A X, Y) = \mathrm{Hom}_B(X, \mathrm{Hom}_A(B, Y))$

коиндуцированный?
B-модуль с
A-модуля Y,

Топологическая версия

$\mathrm{Fun}(\Delta^{op}, Sets) \xrightarrow[\text{реал}]{\text{геом.}} Top$

симплициальные
множества

$X \longmapsto |X|$

$$|X| = \frac{\bigsqcup X_n \times \Delta^n}{(x\varphi, s) = (x, \varphi s)}$$

$X_n \qquad X_n$

$s\in\Delta^n \longrightarrow \Delta^m$

$x \longrightarrow x\varphi$
контравариантное
действие стрелки
$\varphi: [m] \longrightarrow [n]$

$\varphi^*: X_n \longrightarrow X_m$

$x \longmapsto x\varphi$

похожа на тензорное

произведение !

$$\varphi_*: \Delta^m \longrightarrow \Delta^n$$

$$e_i \longmapsto e_{\varphi(i)}$$

$$|[n]| = \Delta^n \rightsquigarrow D = \bigsqcup_n \Delta^n$$

дизъюнктное объединение симплексов.

структура левого модуля над стрелками категории Δ

$$\varphi: [m] \to [n]$$

$$\varphi_*: \Delta^m \longrightarrow \Delta^n$$

X - любое топ. пр-во

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Sing}_n(X) = \mathrm{Hom}_{Top}(\Delta^n, X)$$

n-мерные сингулярные симплексы пр-ва X.

$$\mathrm{Sing}: Top \longrightarrow \mathrm{Fun}(\Delta^{opp}, Sets)$$

$$X \longrightarrow \{\mathrm{Sing}_n(X)\}_n$$

симплициаль-
ное
множес

$[m] \xrightarrow{\varphi} [n]$ в Δ

аффинная $\underline{\Delta^m \xrightarrow{\varphi_*} \Delta^n}$ в Top.

правое умножение на φ_*

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(\Delta^n, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Delta^m, X)$$

$$\mathrm{Sing}_n X \to \mathrm{Sing}_m X$$

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \arrow[r] & X \\
\Delta^m \arrow[u, "\varphi_*"] \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

$$D = \bigsqcup_n \Delta^n$$

$$\mathrm{Sing}(X) = \mathrm{Hom}_{Top}(D, X)$$

" Hom_Δ

$$|Y| \to \mathrm{Hom}_{Top}(Y \otimes_\Delta D, X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\Delta^{op}, sets)}(Y, \mathrm{Hom}_{Top}(D, X))$$

функториально по $Y \in \mathrm{Fun}(\Delta^{op}, sets)$

и по $X \in Top$

$$\mathrm{Hom}_{Top}(|Y|, X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\Delta^{op}, Sets)}(Y, \mathrm{Sing}\, X).$$