Лекция 24 марта (вторая половина)

$f \in k[x]$ $\quad D(f) = \{ p \in X \mid f(p) \neq 0 \}$

$$\begin{array}{c} D(f) \\ \shortparallel \\ X \setminus V(f) \end{array}$$

↖ главное открытое множество.

Утв. (1) Всякое открытое U явл. объединением конечного числа главных
$U = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_m)$.

(2) Всякое открытое $U \subset X$ компактно

(из любого открытого покрытия U можно выбрать конечное подпокрытие).

Док-во: $X \setminus U = V(I) = \bigcap V(f_i)$

$I = (f_1, \ldots, f_n)$

$U = \bigcup D(f_i)$

(2): $U \subset \bigcup_{\alpha} W_\alpha$ можно считать, что $W_\alpha = D(f_\alpha)$ главные.

$$X\setminus U = \bigcap (X\setminus W_\alpha) = V((f_\alpha))$$

$$\underset{\underline{\overset{\shortparallel}{(f_1,\dots,f_m)}}}{V((f_\alpha))} \subset X\setminus U \iff U \subset \bigcup_\alpha D(f_\alpha).$$

$$V((f_1\dots f_m)) \subset X\setminus U \Rightarrow U \subset \bigcup_{i=1}^{m} D(f_i)$$

Пучок регулярных функций

регулярность $\iff$ рациональность.

$\mathbb{k}[X]$ – алгебра

$\cup$

S – эл-ты, не являющиеся делителями нуля.

$1\in S$ $0\notin S$ $a,b\in S \Rightarrow ab\in S$

$\mathbb{k}[X]\cdot S^{-1}$ – кольцо частных со знаменателями в S

$\Big\|$ $\dfrac{f}{g}$ g не делит нуль.

$\mathbb{k}(X)$ | кольцо рациональных функций на X.

Прим.:

X неприводимо $S = \mathbb{k}[X]^*$ – все ненулевые эл-ты

$\Bbbk(X) = Q_{\Bbbk[X]}$ — поле.

$\mathcal{O}_X$ пучок регулярных (= рациональных) функций.

$U \subset X \longrightarrow \mathcal{O}_X[U] \quad (= \Bbbk[U])$

‖ кольцо рациональных функций, регулярных в каждой точке $p \in U$.

= определённый.

$f \in \Bbbk(X)$ наз. регулярной в точке p, если $\exists$ представление $f = \frac{g}{h}$:

$h \in \Bbbk[X]$ не делит нуль

$h(p) \neq 0$

$g \in \Bbbk[X]$

$W = \bigcup U_\alpha$

$s_\alpha \in \mathcal{O}_X[U_\alpha]$

$\exists!\, s \in \mathcal{O}_X[W] \Leftarrow s_\alpha|_{U_\beta \cap U_\alpha} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$

$s|_{U_\alpha} = s_\alpha$

$f(p) \qquad f = \frac{g}{h} \qquad f(p) := \frac{g(p)}{h(p)} \in \Bbbk$

Упр: $f(p)$ не зависит от способа записи

Факт: $U = D(h)$ Тогда

$$\mathcal{O}_X[D(h)] = \mathbb{k}[X]_{(h)} = \mathbb{k}[X][h^{-1}]$$

$$(h) = \{1, h, h^2, \ldots\} \qquad \overset{\shortparallel}{\left\{\frac{f}{h^k} \;\middle|\; f \in \mathbb{k}[X]\right\}}$$

Док-во: $f \in \mathbb{k}(X)$ – рациональная функция.

(f^{-1}) идеал в $\mathbb{k}[X]$

$$\shortparallel$$

$$\{g \in \mathbb{k}[X] \mid gf \in \mathbb{k}[X]\}$$

если $g \in (f^{-1})$ и не делит нуль, то g может быть взят в качестве знаменателя в представлении f дробью $f = \frac{p}{g}$

$g \neq 0$, $g \in \mathbb{k}[X]$ делит нуль $\Longleftrightarrow$ g зануляется вдоль какой-нибудь неприводимой компоненты многообразия X.

$X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$

$g \in I(X_1)$

$V(g) \cap X_i =$ $\quad g \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_n = 0$

$f_i \in I(X_i),$

одно из них должно совпасть с X_i

$$gh = 0 \begin{cases} \boxed{X = V(g) \cup V(h)} \\ \boxed{X_i = (X_i \cap V(g)) \cup (X_i \cup V(h))} \end{cases}$$

(f^{-1}) делители нуля в (f^{-1}) – это объединение конечного числа векторных подпр-в

$(f^{-1}) \cap I(X_i)$ $\quad X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$

← собств. векторное подпр-во

$$(f^{-1}) \subset \left[\bigcup I(X_i)\right] \cup L$$

линейная оболочка не делителей нуля

$\Downarrow$

$(f^{-1}) = L$ не делители нуля линейно порождают (f^{-1}) над $\mathbb{k}$.

$\Downarrow$

(f^{-1}) допускает образующие $g_1 \ldots g_m$ не являющиеся делителями нуля.

Док-во теоремы f регулярна на $\underline{\underline{D(h)}}$.

$f = \frac{p}{g}$ $g(p) \neq 0$ для $p : h(p) \neq 0$.

$\boxed{V(h) \supset V((f^{-1}))}$. h зануляется на $V((f^{-1}))$.

$X \setminus V(h) \subset X \setminus V((f^{-1}))$

$\Downarrow$ по т. Г. Н.

$$h^d \in (f^{-1})$$

$$\Downarrow$$

$$g = f \cdot h^d \in k[X]$$

$$f = \frac{g}{h^d}$$

$f \in k(X)$ регулярна всюду в $D(h)$

$\Updownarrow$

в качестве знаменателя в f можно взять h^k

$D(h)$ $\boxed{k[D(h)]} \subset k(X)$

$D(h)$ – аффинное алгебраическое многообразие.

$$\text{Spec}\, \Bbbk[D(h)] = \text{Spec}\, \Bbbk[X][h^{-1}]$$

приведённая конечно порождённая алгебр.

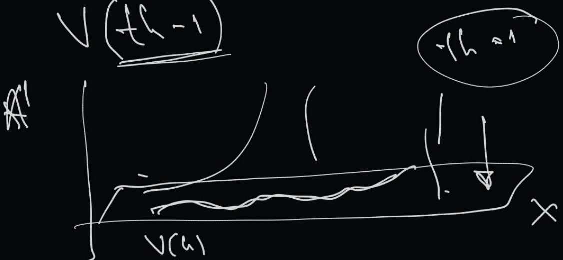
$$\Bbbk[X][h^{-1}] = \frac{\Bbbk[t, X]}{(th-1)}$$

замкнутое подмногообразие

в $X \times \mathbb{A}^1 = \text{Spec}(\Bbbk[t, X]) = \text{Spec}(\Bbbk[t] \otimes \Bbbk[X])$

$\cup$

$V(\underline{th-1})$



Главные открытые подмножества – это аффинные алгебраические многообразия

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi^*"] \arrow[dr, two heads, "\pi^*"'] & & B \\
& A/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi \arrow[ur, hook, "i^*"'] &
\end{tikzcd}$$

гомоморфизм

приведен

конечно порождена

В Alg_k

$$\begin{tikzcd}
k[X] \arrow[rr, "\varphi^*"] \arrow[dr, two heads, "\pi^*"'] & & k[Y] \\
& k[Z] = A/\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi \arrow[ur, hook, "i^*"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X & & Y \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[dl, "i"] \\
& Z = \overline{\varphi(Y)} \arrow[ul, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

$Z \xhookrightarrow{\pi} X$

$\boxed{\pi^* : k[X] \twoheadrightarrow k[Y] \text{ сюрьекция.}}$

$$Z = \operatorname{Specm} \frac{k[X]}{\ker\pi^*} = V(\ker\pi^*)$$

является замкнутым подмножеством

$V(\ker\pi^*)$ в X.

f наз. замкнутым вложением, если
$f^*: \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[Z]$ эпиморфен.

$i: Y \longrightarrow Z$

$\boxed{i^*: \Bbbk[Z] \hookrightarrow \Bbbk[Y] \text{ инъективно.}}$

$\Updownarrow$

ненулевая $f: Z \longrightarrow \Bbbk$

$i^* f: Y \to \Bbbk$ тоже ненулевая

$i^* f(y) = f(iy)$

всякая ненулевая функция на Z ограничивается в ненулевую функцию на $\varphi(Y) \subset Z$. $\Longleftrightarrow$ $\varphi(Y)$ плотно в Z

i^* инъективно $\Longleftrightarrow$ образ i плотен.

если X неприводимо, то
$\varphi: X \longrightarrow Y$ наз. доминантивен,
если $\varphi^*: \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X]$
инъективен $\Longleftrightarrow$
$\varphi(X)$ плотно в Y
(по Зарисскому).

Для общего $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$

где X_i неприводимы

$\varphi : X \longrightarrow Y$ наз. доминантным,

если $\varphi|_{X_i} : X_i \longrightarrow Y$ доминантен

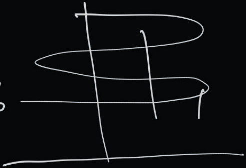
для всех i $\Longleftrightarrow$ $\varphi(X_i)$ плотно

в Y $\forall i$.

Конечные морфизмы

/

уточнение конечности слоёв

(немного больше)