Лекция 31 марта (первая половина)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & & B \\
& A/\ker\varphi = \operatorname{im}\varphi \arrow[ur, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} A = Y & & X = \operatorname{Spec} B \arrow[ll, "\varphi^*"'] \arrow[dl, "i^*"] \\
& \overline{\varphi^*(X)} \arrow[ul, hook, "\pi^*"] &
\end{tikzcd}$$

замкнутое вложение

доминантный м.

Про доминантность Если X неприводимо, то

$\varphi: X \to Y$ наз. доминантным, если

$\varphi^*: \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X]$ инъективен.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[d] \\
& \Bbbk
\end{tikzcd}
\qquad \underline{\underline{\varphi^* f = f\circ\varphi}} = f\big|_{\varphi(X)}$$

доминантность = плотность образа

Если X приводимо $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$

то $\varphi: X \to Y$ наз. доминантным, если

$\varphi\big|_{X_i}: X_i \to Y$ доминантно $\forall i$.

Конечные морфизмы $\varphi: X \to Y$

$\varphi^*: \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$

$$A \longrightarrow B$$

$\mathbb{k}[X]$ является алгеброй над $\mathbb{k}[Y]$.

$\|$

алгеброй над $\varphi^*(\mathbb{k}[Y])$

$\cap$

$\mathbb{k}[X]$

$g: X \to \mathbb{k}$ $\quad f: Y \to \mathbb{k}$

$f \cdot g = \underset{\mathbb{k}[X]}{\underset{\in}{\varphi^*(f)}} \cdot g$ структура $\mathbb{k}[Y]$-алгебры на $\mathbb{k}[X]$

Опр $\varphi: X \to Y$ наз. конечным, если $\mathbb{k}[X]$ явл. конечно порождённым модулем над $\mathbb{k}[Y]$, т.е.

$= \mathbb{k}[X]$ цел. над $\mathbb{k}[Y]$

$\exists f_1, \dots, f_m \in \mathbb{k}[X]$: любую функцию $h: X \to \mathbb{k}$ можно представить в виде $\mathbb{k}[Y]$-линейной комбинации:

$$h = \varphi^*(g_1) \cdot f_1 + \dots + \varphi^*(g_m) \cdot f_m$$

для некоторых $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{k}[Y]$

Пример: проекция гиперболы $V(xy-1)$

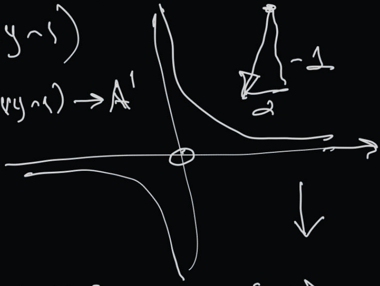
$V(xy-1)$

прямую $y=0$

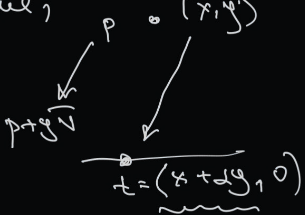
$\pi : V(xy-1) \to \mathbb{A}^1$

вдоль вектора

$\bar{v} = (\alpha, -1).$



при $\alpha \neq 0$ проекция конечна,
а при $\alpha = 0$ – нет.



$$\boxed{\frac{\Bbbk[x,y]}{(xy-1)}} \xrightarrow{} A \qquad \frac{\Bbbk[x,y]}{(xy-1)} \longleftarrow \Bbbk[t] : \pi^*$$

$t \mapsto x - \alpha y$

$$\boxed{\pi^* f(x,y) = f(\pi(x,y))}$$

A явл. конечно порождённым $\Bbbk[t]$-модулем?

$x \quad y.$

Упражнение написать уравнение целой зависимости для x и для y в $\Bbbk[x,y]/(xy-1)$

$t \to \boxed{x + \frac{\alpha}{x}}$

$\alpha = 0 \qquad \Bbbk[t] \longrightarrow \Bbbk[x, x^{-1}] \qquad t \to x$

x^{-1} не цел над $\Bbbk[x]$

$\varphi : X \to Y$ наз. конечным, если алгебра $k[X]$ цела над $k[Y]$

Основная теорема: $\varphi : X \to Y$ конечный, то

(1) его ограничение на каждое замкнутое подмножество $Z \subset X$ тоже конечно,

(2) $\varphi(Z)$ – замкнуто для каждого замкнутого $Z \subset X$

(3) если X неприводимо и $Z \subsetneq X$ замкнуто то $\varphi(Z) \subsetneq Y$

Док-во: (1)

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ V(I) & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} k[Z] \arrow[r, phantom, "="] & \frac{k[X]}{I} & k[X] \arrow[l, "i^*"'] & k[Y] \arrow[l, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

к.п. модуль над $\varphi^*(k[Y])$

к.п. $k[Y]$-модуль.

(2) условие редукций:

– можно считать, что $Y = \overline{\varphi(Z)} = \operatorname{Spec} \varphi^*(k[Y])$

$\varphi|_Z : \underline{Z \to \overline{\varphi(Z)} \subset Y}$ тоже конечный морфизм.

$X \longrightarrow Y$ доминантный

$k[X] \hookleftarrow k[Y]$ надо показать, что он сюръективен (если конечный)

② проверить равенство $\underline{\underline{\varphi(X) = \overline{\varphi(X)}}}$

можно отдельно для каждой неприводимой компоненты $X_i \subset X$.

$\Downarrow$

можно считать, что X неприводимо

$$\boxed{X \xrightarrow{\varphi} Y}$$

$k[Y] \subset k[X]$ подалгебра

$k[X]$ бд делителей нуля?

$k[X]$ конечно порождён как модуль.

$$\boxed{\begin{tikzcd} \operatorname{Specm} k[Y] & \operatorname{Specm} k[X] \arrow[l] \\ \mathfrak{m} \cap k[Y] & \mathfrak{m} \arrow[l, mapsto] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] \\ & k[X] \end{tikzcd}}$$

надо проверить, что любой макс. идеал $\mathfrak{m} \subset k[Y]$ имеет вид $\tilde{\mathfrak{m}} \cap k[Y]$ для некоторого макс. идеала $\tilde{\mathfrak{m}} \subset k[X]$

$\underline{\underline{m}} < \Bbbk[Y] \rightsquigarrow m\cdot\Bbbk[X]$

идеал, порождённый m в $\Bbbk[X]$

если он не содержит 1, то в качестве $\tilde{m}$ можно взять любой макс. идеал $\tilde{m} \supset m\cdot\Bbbk[X]$

Пусть $\underline{m\cdot\Bbbk[X] = \Bbbk[X]}$ (*)

пусть $f_1,\dots,f_n$ порождают $\Bbbk[X]$ как модуль над $\Bbbk[Y]$.

$$(*) \Rightarrow \exists\, M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(m)$$

$$(f_1,\dots,f_n) = (f_1,\dots,f_n)\cdot M$$

$$(f_1,\dots,f_n)\cdot(E-M) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{(f_1,\dots,f_n)}\cdot\det(E-M) = 0$$

$$E\cdot\det(E-M) = (E-M)(E-M)^{\vee}$$

$\boxed{\text{присоед.}}$

$$\det(E-M) \in \Bbbk[X]$$

$\overset{\shortparallel}{1} + (\dots\dots)_{\in m}$ $\boxed{m \subset k[Y]}$

$k[x]$ нет делителей нуля $\Longrightarrow$ $\det(E-M)=0$

$1 + (\underset{\underset{m}{\in}}{\dots\dots}) = 0 \;\rightarrow\; 1 \in m$

$\Downarrow$

конечный морфизм замкнут.

---

(3) $Z \subsetneq X$, X неприводимо

$\varphi(Z) \subsetneq Y$.

Надо указать $g \in k[Y]:\ g \neq 0\ \ g\big|_{\varphi(Z)} \equiv 0$

$Z \subsetneq X \Rightarrow \exists\, f \in k[x]\ \ f\big|_Z \equiv 0,\ f \neq 0$

f - цела над $k[Y] \Longrightarrow$

$$\boxed{0 = f^n + \varphi^*(g_1) f^{n-1} + \dots + \varphi^*(g_{n-1}) \cdot f + \varphi^*(g_n)}$$

тк $g_i \in k[Y]$ тождество в $k[x]$

выберем уравнение $\uparrow$ самой маленькой степени. Тогда свободный член $\left(\varphi^*(g_n) \neq 0\right)$ в $k[x]$

(В $k[x]$ нет делителей нуля)

подставим в уравнение произв.
точку $z \in Z$ $\Rightarrow$ $\varphi^*(g_m)(z) \equiv 0$ на Z

$$\begin{array}{c}\varphi^*(g_m)(z) \\ \| \\ g_m(\varphi(z))\end{array}$$

$g_m\big|_{\varphi(Z)} \equiv 0$.

Теорема доказана!

Теорема 2 : $\varphi: X \twoheadrightarrow Y$ конечный? сюръективный (= доминантный) морфизм и Y — нормально. Тогда:

(1) φ открыт, т.е. $\forall$ открыто $U \subset X$ $\varphi(U)$ открыто в Y

(2) Каждая неприводимая компонента X сюръективно отображается на Y.

Отступление про нормальность ?

Комм. кольцо A наз. нормальным, если оно без делителей нуля и целозамкнуто в своём поле частных.

Пример: $\mathbb{Z}$ – нормально.

$\boxed{\frac{p}{q}}$ цела над $\mathbb{Z}$

$(p,q)=1$ $$0 = \frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n$$

$a_i \in \mathbb{Z}$ $$\boxed{p^n + q(\ldots\ldots) = 0}$$

Любое факториальное кольцо нормально

Алг. многообразие X наз. нормальным, если $\Bbbk[X]$ нормальна.

$\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ – факториально $\Rightarrow \mathbb{A}^n$ нормально.

Важное следствие нормальности:

$A \longrightarrow Q_A$ поле частных

B – алгебра над Q_A.

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$-алгебра $\underline{B}$

$b \in B$ алгебраический? над $\mathbb{Q}$ элемент

пусть b цел над $\mathbb{Z}$

на b есть уравнение целой? зависимости (с к-тами из $\mathbb{Z}$)

у b есть минимальный? многочлен (с к-тами из $\mathbb{Q}$).

Нормальность $\Rightarrow$ у минимального многочлена целые коэф-ты.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{ev}_b : \mathbb{Z}[x] \arrow[r] & B \\ f(x) \arrow[r, mapsto] & f(b) \end{tikzcd}$$

$\ker(\mathrm{ev}_b) = ?$ $\ker(\mathrm{ev}_b) = (\mu_b)$

мин. многочлен b над $\mathbb{Q}$, он автоматически лежит в $\mathbb{Z}[x]$

В общем случае: A – нормальное кольцо, Q_A – поле частных, B – алгебра над Q_A, $b \in B$ – элемент, целый над A. (автоматически алгебраический над Q_A)

Утв: Минимальный многочлен $\mu_b(t) \in Q_A[t]$ элемента b над Q_A имеет к-ты в $A[t]$ (является уравнением целой зависимости).

Док-во: Пусть $f(t) \in A[t]$ приведённый дающий уравнение целой зависимости

$$f(b)=0 \Rightarrow \underline{f(t)} = \mu_b(t) \cdot g(t) \quad \text{в } \underline{Q_A[t]}$$

все многочлены приведённые

По лемме Гаусса все к-ты μ_b и g целы над $A \Longrightarrow$ лежат в A, т.к. A целозамкнуто в Q_A.