Лекция 31 марта (вторая половина)

Док-во теоремы: $X \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} Y$

φ сюрьективен, Y нормально.

φ открыт $\forall f \in \Bbbk[X]$ $\varphi(D_f)$ – открыто

$$D_f = X - V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall p : f(p) \neq 0 \quad \exists g : Y \to \Bbbk : \\ \varphi(p) \in D_g \subset \varphi(D_f) \end{array}}$$

$$\psi = \varphi \times f : X \longrightarrow Y \times \mathbb{A}^1$$

$$x \longmapsto (\varphi(x), \underline{\underline{f(x)}})$$

$$\Bbbk[X] \longleftarrow \Bbbk[Y][t] : \psi^*$$

$$G(f) \longleftarrow G(t)$$

$$G \in \Bbbk[Y][t]$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \Bbbk[Y] \subset \Bbbk[X] \\ X \twoheadrightarrow Y, \end{array}}$$

$$g_m f^m + \ldots + g_0 \longleftarrow\!\shortmid\; g_m t^m + \ldots + g_0 \qquad g_i \in \Bbbk[Y]$$

φ – конечный? морфизм. $\Rightarrow \varphi(X) \subset \mathbb{k}[Y]\times\mathbb{A}^1$

замкнуто

$\varphi(X) = V(\ker \varphi^*)$ $\quad \varphi^* = ev_f$

$\ker ev_f = (\mu_f)$ $\quad \mu_f(t)$ – минимальный многочлен элемента f над $\mathbb{k}(Y) \leftarrow$ поле частных

$\Downarrow$

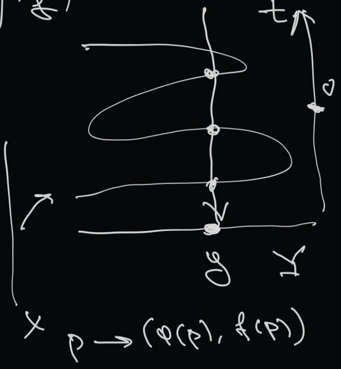
Он автоматически лежит в $\mathbb{k}[Y][t]$

φ сюръективно отображает X на гиперповерхность $V(\mu_f) \subset Y\times\mathbb{A}^1$

$$\boxed{t^n + g_1 t^{n-1} + \dots + g_n = 0}$$

$D_f \subset X$ $\quad p$

$\varphi(D_f) = \{y \in Y : y$ мн-на $t^n + g_1(y)t^{n-1} + \dots + g_n(y)\}$



$p \to (\varphi(p), f(p))$

есть ненулевой корень.

$p \in D_f$ $\quad \varphi(p) \in \varphi(D_f) \Rightarrow$ у мн-на

$$t^n + g_1(\varphi(p))t^{n-1} + \ldots + g_n(\varphi(p))$$ есть ≠0 корень

$$\Downarrow$$

$\exists i : g_i(\varphi(p)) \neq 0 \Rightarrow \forall y : g_i(y) \neq 0$

у мн-на есть ≠0 корень.

$$\varphi(p) \in D_{g_i} \subset \varphi(D_f)$$

Утв. (1) доказано

(2) $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k$ $\quad \varphi(X_i) = Y$

$X \longrightarrow Y$
конечная сюръекция
на нормальное Y

$$U_i = X \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} X_j\right) = X_i \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} \{X_i \cap X_j\}\right)$$

U_i открыто в X и в $X_i \Rightarrow$ плотно в X_i

в силу (1) $\varphi(U_i)$ открыто в Y

$$\overline{\varphi(U_i)} = Y$$

$$\parallel$$

$$\varphi(X_i) \qquad \boxed{X_i = \overline{U_i}} \qquad \Rightarrow \boxed{\varphi(X_i) = Y}$$

Понятие многообразие

Многообразие — это топологическое пр-во X : у каждой точки $p \in X$ есть открытая окрестность $U \ni p$, гомеоморфная "стандартной модели"

т. е. задан гомеоморфизм

$$\varphi_U : \underline{X_U} \xrightarrow{\sim} U$$

(локальная карта)

и все эти карты согласованы,

в след. смысле

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, phantom, "\supset"] & U\cap W \arrow[r, phantom, "\subset"] & W \\
X_U \arrow[u, "\varphi_U", "\wr"'] & & X_W \arrow[u, "\wr", "\varphi_W"'] \\
\varphi_U^{-1}(U\cap W) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[rr, "\varphi_W^{-1}\circ\varphi_U", "\sim"'] & & \varphi_W^{-1}(U\cap W) \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

гомеом-м

между открытыми множествами в стандартных моделях.

Он должен быть "регулярным"

В алгебраической геометрии:

- локальная модель — это любое аффинное алгебраическое многообразие с топологией Зар.

локальная карта — это гомеоморфизм

$$\varphi_U : \underset{\text{аффинное алг. многообразие.}}{X_U} \xrightarrow{\sim} U \subset X$$

- согласованность карт:

$$\begin{tikzcd}
\tilde U & U\cap W \arrow[l, phantom, "\supset"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & W \\
X_{\tilde U} \arrow[u, "S"', "\varphi_{\tilde U}"] & & X_W \arrow[u, "S", "\varphi_{\tilde W}"'] \\
\varphi_U^{-1}(U\cap W) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[rr, "\varphi_W^{-1}\circ\varphi_{\tilde U} = \varphi_{W\tilde U}", "\sim"'] & & \varphi_W^{-1}(U\cap W) \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

гомеом.

регулярность $\Longleftrightarrow$ рациональность

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{k}[\underline{\varphi_U^{-1}(U\cap W)}] & \mathbb{k}[\underline{\varphi_W^{-1}(U\cap W)}] \arrow[l, "\varphi^*_{WU}"']
\end{tikzcd}$$

рациональные функции на $X_{\tilde U}$, определённые всюду на $\varphi_U^{-1}(U\cap W)$

рац. функции на X_W, определённые всюду на $\varphi_W^{-1}(U\cap W)$

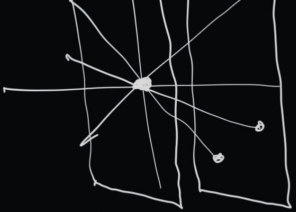
регулярность $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ φ^*_{WU} переводит регулярные функции в регулярные функции

Пример: $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$ – одномерные векторные подпр-ва в $\mathbb{k}^{n+1}$

$\mathbb{k}^{n+1}$
$\xi(x)=1$

$U_\xi = \{x \in \mathbb{k}^{n+1} \mid \xi(x) = 1\}$

$\xi \in (\mathbb{k}^{n+1})^*$ – ненулевая линейная форма на $\mathbb{k}^{n+1}$



$\xi(x)=0$

бесконечность $\mathbb{k}^n$ карты U_ξ

аффинная карта

Стандартные карты

$U_i = U_{x_i} = \{x = (x_0, \dots, x_n) \mid x_i = 1\}$

$n+1$ карт

точке $x \in \mathbb{P}_n$ $x = (x_0 : \dots : x_n)$ с точностью до пропорциональности

$$\boxed{x \in U_i \Leftrightarrow x_i \neq 0}$$

$$\left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \overset{i}{1}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots \frac{x_n}{x_i}\right) \in \{x_i = 1\}$$

$$\varphi_i \quad (t_{0,i} \ t_{1,i}, \ t_{i-1,i}, \Longleftarrow \ t_{i+1,i} \dots t_{n,i}) \in \mathbb{k}^n$$

аффинные координаты $t_{\nu,i}$ в карте U_i
$\nu \neq i, \ 0 \le \nu \le n$

$$\varphi_i : \mathbb{k}^n \ (t_{0,i}, \dots, t_{n,i}) \longrightarrow U_i$$

$$\varphi_{ij} : U_j \longrightarrow U_i \longleftarrow t_{j,i} = 0$$

$U_j \cap U_i$

$t_{i,j} \neq 0$

$$\left(\frac{x_0}{x_j} \ \frac{x_1}{x_j} \ \dots \ \frac{x_{j-1}}{x_j} \ \overset{j}{1} \ \frac{x_{j+1}}{x_j} \ \frac{x_n}{x_j}\right)$$

$$t_{k,i} = \boxed{\frac{x_j}{x_i}} t_{k,j} = \frac{t_{k,j}}{t_{i,j}} \quad (t_{0,j}, \ldots, t_{n,j})$$

$$? \ \frac{1}{t_{ij}} \qquad k \neq j$$

$$t_{j,i} = \frac{1}{t_{i,j}}$$

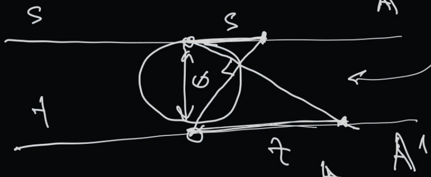
$\mathbb{P}_n$ – алгебраическое многообразие.

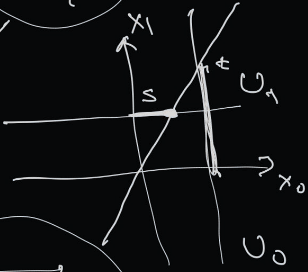
$\mathbb{P}_1$

$$(x_0 : x_1) = \Big(1, \underbrace{\frac{x_1}{x_0}}_{t}\Big) \in U_0$$

$$U_1 \ni \Big(\underbrace{\frac{x_0}{x_1}}_{s} : 1\Big)$$

$$s = \frac{1}{t}$$

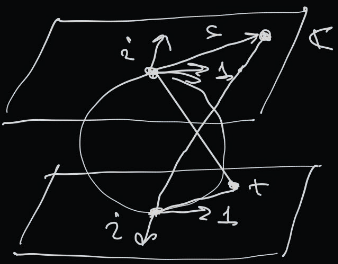




$\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = S^1$

$\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = S^2$

сфер Ф1



$s = \frac{1}{t}$

$\mathbb{C}$ $|s| = \frac{1}{|t|}$

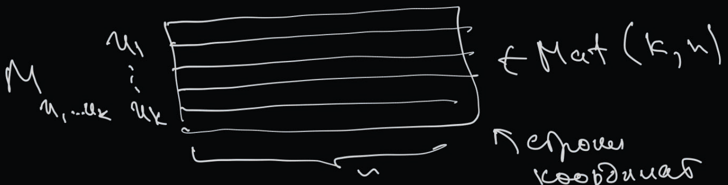
$\operatorname{Arg} s = -\operatorname{Arg} t$

$Gr(k,V)$ = k-мерные векторные подпр.-ва в V

$\mathbb{P}(V) = Gr(1,V)$

$V = \Bbbk^n$ $\quad Gr(k,n)$ $\quad k$-мерные подпр.-ва в $\Bbbk^n$

$U < \Bbbk^n$ выбрать базис $u_1,\dots,u_k$



строки координат базисных векторов.

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix} = \underset{\substack{\cap \\ GL_k}}{G} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

$$M_{w_1\dots w_k} = G\, M_{u_1\dots u_k}$$

$Gr(k,n)$ = $k \times n$ матрицы ранга k с точностью до умножения слева на обратимые $k \times k$-матрицы.

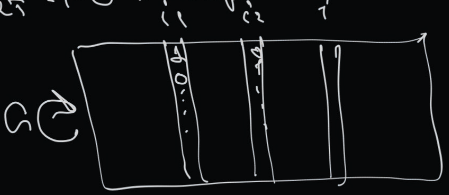
$\mathbb{P}_{n-1} = Gr(1,n)$

строки с точностью до умножения на константу

$\mathcal{U}_I \qquad I = (i_1 < \ldots < i_k).$

$\parallel$

все такие матрицы, что в столбцах из I у них стоит $\neq 0$ минор:



$U \in \mathcal{U}_I$ у неё есть канонический базис (единственный): в столбцах с номерами I стоит $E_{k\times k}$, прообраз стандартных базисных векторов

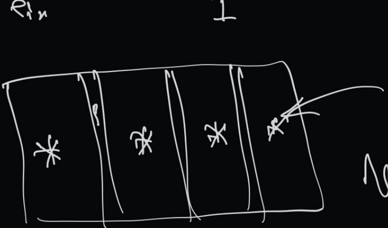
$\Updownarrow$

$U \Rightarrow$ координатное подпр-во, натянутое на $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ изоморфно

$\Updownarrow$

пересекается по нулю с дополнительным координатным подпр-вом.

$e_{i_1} \ldots \ldots e_{i_k}$



$\mathcal{U}_I$ состоит из таких

координаты

$\mathcal{U}_I \simeq \mathbb{A}^{k(n-k)}$

Задание на дом: проверить, что

склейка $\varphi_{IJ}: U_J \longrightarrow U_I$

на $U_J \cap U_I$

задаётся рациональными функциями

$Gr(k,n)$ — это алг. многообр.

$\mathbb{k}$ поле $\qquad$ $\mathbb{K} \supset \mathbb{k}$

↑ конечномерно над $\mathbb{k}$

(алгебраично над $\mathbb{k}$)

конечномерность $\Rightarrow$ алгебраичность

$\xi \in \mathbb{K}$ $\qquad$ $\xi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ линейный

$x \longmapsto \xi x$ оператор.

$\chi_\xi(t)$ — хар. многочлен.

$\chi_\xi(\xi) = 0 \to \xi$ алгебраичен.

$1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{\dim \mathbb{K}}$

линейно зависимы

$$\underline{(c_0 + c_1\xi + \ldots + c_{\dim \mathbb{K}}\xi^{\dim \mathbb{K}} = 0)}$$

b — элемент, алгебраичный над $\mathbb{k}$

$$ev_b : \Bbbk[t] \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$f(t) \longmapsto f(b)$$

алгебраичность
$\Updownarrow$ def
$\ker(ev_b) \neq 0$

$\ker(ev_b) < \Bbbk[t]$ – это идеал.

$\parallel$

(μ_b)

$\mu_b = \mu_b(t) \in \Bbbk[t]$
приведённый многочлен наименьшей степени, который аннулирует b.

$\mu_b(t)$ – неприводим, т.к. $\mathrm{im}(ev_b) < \mathbb{K}$

$\parallel$

$\Bbbk[t]/(\mu_b)$ $\quad \Bbbk < \mathbb{K}$

не имеет делителей нуля

минимальный многочлен алгебраического элемента над полем неприводим (делит все прочие аннулирующие этот эл-т многочлены),

- $\Bbbk$ – алг. замкнуто много ли в $\Bbbk[t]$ неприводимых многочленов?

$\mu_b(t) = \alpha t + \beta \qquad \mu_b(b) = 0$

$\alpha b + \beta = 0 \quad b = -\beta/\alpha \in \Bbbk$