Лекция 7 апреля (вторая половина)

Пример Результант пары многочленов степеней m и n от двух переменных

$$A(x_0,x_1) = a_0x_0^m + a_1x_0^{m-1}x_1 + \ldots + a_m x_1^m$$

$$B(x_0,x_1) = b_0x_0^n + b_1x_0^{n-1}x_1 + \ldots + b_n x_1^n$$

$$S^{d-m}V^* \times S^{d-n}V^* \longrightarrow S^d$$

$$(g_1, g_2) \longrightarrow Ag_1 + Bg_2$$

$V(A)\cap V(B) \neq \emptyset$ на $\mathbb{P}_1$ есть общий корень

НОД$(A,B)=h$ $\deg h \geq 1 \Rightarrow$ такое отображение не эпиморфно, его образ состоит из многочленов делящихся на d.

при $\underline{\underline{d = m+n-1}}$ матрицы квадратные

$d+n = m+n$

$$\varphi:\ \underline{S^{n-1}V^* \times S^{m-1}V^* \longrightarrow S^{m+n-1}V^*}$$

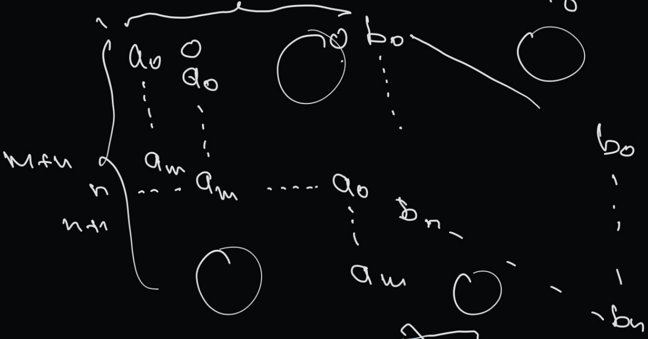
$$g_1, g_2 \longmapsto Ag_1 + Bg_2$$

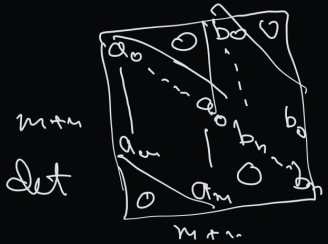
$$\boxed{\det\varphi = 0} \Longrightarrow \exists\ \underline{g_1, g_2}\ \boxed{\underset{n-1}{g_1}\underset{m}{A} = \underset{m-1}{g_2}\underset{n}{B}}$$

$\deg \text{НОД}(A,B) \geq 1$

$\Leftrightarrow$ t_0^m t_1^m у A и B есть общий корень.

$A = a_0 \dots a_m$ $\quad B = b_0 \dots b_n$ $\quad t_0^n \quad t_1^n$





$= R_{A,B}$ результант пары многочленов.

результантное многообразие в $\mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n$ — это гиперповерхность

Следствие 1: $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$

$(x, t) \longmapsto t$

замкнуто, т.е. переводит замкнутые (по Зарисскому) множества в замкнутые.

Док-во $Z \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$

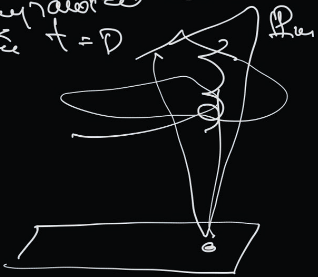
$$Z = V(f_1(x,t), \dots, f_k(x,t))$$

$f_i(x,t)$ однороден по x.

$$\pi(Z) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid \cap V(f_i(x, \underline{p})) \neq \varnothing\}$$

получаются подстановкой $t = p$

Набор полиномиальн. всех уравнений на к-ты многочленов $f_i(x,p)$ которые сами по себе многочлены от p



$\pi(Z)$ задаётся полиномиальными уравнениями.

Сл2 $\forall$ проективного X и любого Y проекция

$$X\times Y \to Y$$ замкнута.

Док-во $Y=\cup W$ W - аффинно.

$$\begin{tikzcd} X\times W \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & W \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ \mathbb{P}_n\times \mathbb{A}^n \arrow[r] & \mathbb{A}^n \end{tikzcd}$$

$X\times W \to W$ замкнуто.

$\mathbb{P}_n\times\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ $\leftarrow$ замкнута по $\boxed{\text{Сл 1}}$

$X\times W$ замкнуто в $\mathbb{P}_n\times\mathbb{A}^n$

Сл3 Если X проективно, а Y отделимо, то любое регулярное отображение $X\to Y$ замкнуто.

Док-во: $Z\subset X$ $\varphi : X\to Y$

$$\Gamma_\varphi = (x,\varphi(x))\in X\times Y$$

регулярно $X\times Y \xrightarrow{\varphi\times 1} Y\times Y$

$$(x,y)\longmapsto(\varphi(x),y)$$

$$\Gamma_\varphi = (\varphi\times 1)^{-1}(\Delta)$$

$\Delta\subset Y\times Y$

(y,y)

$(x,\varphi(x)) \nearrow (\varphi(x),\varphi(x))$

если Y отделимо, то

$\Delta\subset Y\times Y$ замкнута $\Rightarrow$ Γ_φ замкнут.

$$X \longrightarrow Y$$

$$X \times X$$

$$(Z\times X)\cap\Gamma_\varphi \subset \underline{X\times Y \xrightarrow{\pi} Y}$$

$$(z,\varphi(z)) \qquad (z,\varphi(z)) \longrightarrow \varphi(z)$$

замкнуто

$$\varphi(Z) = \pi\big(\underset{\text{замкнуто}}{(Z\times X)}\cap \underset{\text{замкнуто}}{\Gamma_\varphi}\big)$$

$$\Downarrow$$

$\varphi(Z)$ замкнуто в Y.

Сл. 4 Если X проективно, а Y аффинно, то $\forall$ отображение $X \xrightarrow{\varphi} Y$ стягивает каждую связную компоненту X в точку.

Док-во X - связно.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rrrr, bend right, "\text{не эпиморфное}"'] & Y \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^n \arrow[r, "\text{коорд. } i\text{-тая}"] & \mathbb{A}^1 \arrow[r, hook] & \mathbb{P}_1
\end{tikzcd}$$

$\Longleftarrow$

образ замкнут. = конечный набор точек

$\|$

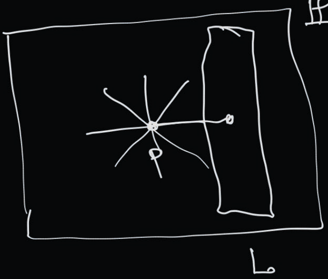
одна точка

каждая координатная функция на $\varphi(X) \subset Y \subset \mathbb{A}^n$ константа.

$\varphi(X)$ — одна точка.

Пример: каждая регулярная функция на проективном X — это константа.

Пример: раздутие



$\mathbb{P}_n \ni p$

множество проходящих через p прямых — это $\mathbb{P}_n$

$L \subset \mathbb{P}_n$ гиперплоскость

$\ell \in L \longrightarrow (p\ell)$ биекция!

$$\mathbb{P}_n \times L = \{(x,\ell) \mid x \in \mathbb{P}_n, \ \underset{\text{прямая}}{\ell \ni p}\}$$

$$\cup$$

$$B_p\mathbb{P}_n = \{(x,\ell) \mid x \in \ell\}$$

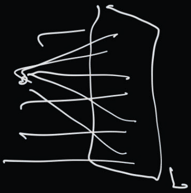
раздутие $\mathbb{P}_n$ в точке p

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}_n \times L \arrow[dl, "\sigma_p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
\mathbb{P}_n & & L
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (x, l) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x & & l
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B_p\mathbb{P}_n \arrow[d, "\pi"] \\
L
\end{tikzcd}$$

линейное расслоение над каждой точкой $l \in L$



$\pi^{-1}(l) = (pl)$

$x \in (pl)$

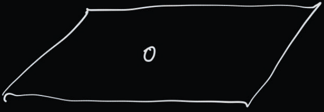
(px) однозначно задаётся точкой x, если $x \neq p$

$\sigma_p^{-1}(x) = x$

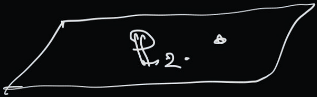
σ_p - биекция всюду над $\mathbb{P}_n \setminus p$.

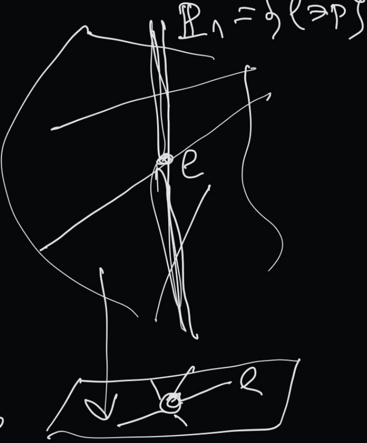
$\sigma_p^{-1}(p) = L$

$\mathbb{P}_{n-1} = L$



$\mathbb{P}_n$





Факт.

$B_p \mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_n \times L$

это алгебраическое многообразие.

Выберем координаты $x_0 \ldots x_n$ на $\mathbb{P}_n$ так, что

$p = (1:0:\ldots:0)$ $L = x_0 = 0$

$L = \{(0:t_1:\ldots:t_n)\}$

$B_p\mathbb{R}_n = \mathbb{R}_n \times L = \{ (x,t) \mid$ x, t, P коллинеарны

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_n \\ 0 & t_1 & \dots & t_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = 1$$

$$\boxed{x_i t_j - x_j t_i = 0}$$

$$1 \le i < j \le n$$