Лекция 14 апреля (первая половина)

Размерность

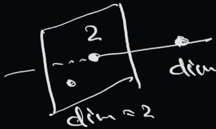
X - алгебраическое многообразие

$x \in X$ - точка

$\dim_x X = \max n$: $\exists$ цепочка неприводимых замкнутых подмногообразий вида

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \ldots \subsetneq X_n \subseteq X$$

Размерность может быть разной в разных точках



Если X неприводимо, то в максимальной цепи

$\boxed{X_n = X}$

Если x лежит на нескольких неприводимых компонентах, то $\dim_x X$ - размерность максимальной неприводимой компоненты, прох. через x

Наблюдение: $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ сюръективный морфизм

$\forall x \in X \quad \dim_x X \geq \dim_{\varphi(x)} Y$

Док-во: $\{\varphi(x)\} = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq Y_2 \subseteq \ldots \subsetneq Y_n \subseteq Y$

$\forall i$: $\varphi^{-1}(Y_i) = Z_1 \cup \ldots \cup Z_n$ Z_i - неприводимы

$\exists Z_\nu : \overline{\varphi(Z_\nu)} = Y_i$ положим $X_i = Z_\nu$

$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \ldots \subsetneq X_n \subseteq X$

Конечные морфизмы и размерность

Для аффинных X, Y морфизм $\varphi : X \to Y$ наз. конечным если $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ делает $\Bbbk[X]$ целой $\Bbbk[Y]$-алгеброй ($\Leftrightarrow$ $\Bbbk[X]$ конечно порождено как $\Bbbk[Y]$-модуль)

(1) Каждый конечный морфизм замкнут
(2) $\forall$ замкнутого $Z \subsetneq X$ $\varphi(Z) \neq Y$.
(3) ограничение $\varphi|_Z$, где $Z \subset X$ - замкнуто, тоже конечно

если $X \to Y$ конечен, то $\dim_x X \leq \dim_{\varphi(x)} Y$

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_n \subseteq X$$
$$\downarrow \varphi$$
$$\{\varphi(x)\} = \varphi(X_0) \subsetneq \varphi(X_1) \subsetneq \ \subsetneq \varphi(X_n) \subseteq Y$$

Для произвольных многообразий X, Y $\boxed{\text{Опр.}}$

$\varphi : X \to Y$ наз. конечным, если

(1) ∀ аффинной карты $Y_U \subset Y$ прообраз $\varphi^{-1}(Y_U) \subset X$ тоже является аффинной картой

(2) $\varphi\big|_{\varphi^{-1}(Y_U)} : \varphi^{-1}(Y_U) \to Y_U$ - конечный морфизм аффинных многообразий.

∀ конечного морфизма $\varphi : X \to Y$ $\forall x \in X$

$\dim_x X \leq \dim_{\varphi(x)} Y$

∀ аффинной окрестности $X_U \subset X$ $\forall x \in X_U$

$\dim_x X_U = \dim_x X$

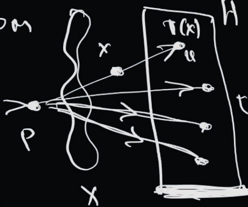
$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subset \dots$

$X_0 \cap X_U \subsetneq X_0 \cap X_U \subsetneq \dots$

Важный пример: $X \subset \mathbb{P}_n$ - замкнутое проективное многообразие

$p \notin X$, $H \subset \mathbb{P}_n$ - гиперплоскость: $p \notin H$.

Тогда проекция $\pi : X \to H$ из точки p является конечным морфизмом



Док-во: Выберем координаты так, чтобы $p = (1:0:\dots:0)$

$x_n = 0$

$H = V(x_0) = \{(0 : u_1 : \dots : u_n)\}$

$U_n \subset H$: $U_n = \{u \mid u_n \neq 0\} = (0, u_1, \dots, u_{n-1}, 1)$

x-координаты на $\mathbb{P}_n$

Рассмотрим открытый конус с проколотой вершиной P над картой U_n $\qquad \underset{\overset{\|}{\mathbb{A}^{n-1}}}{\overset{u}{U_n}} \times \overset{t}{\mathbb{A}^1} = \mathbb{A}^n$

$$\boxed{x = u + pt}$$

$(x_0 : \dots : x_n) = (t : u_1 : \dots : u_{n-1} : 1)$

$\pi : \underline{\underline{\mathbb{P}_n \setminus p}} \longrightarrow H$

$X^{-1}(U_n) \cap X$

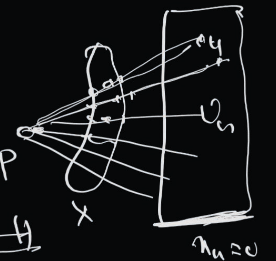
$\pi^{-1}(U_n) \simeq \mathbb{A}^n$

если X задаётся уравнениями

$f_\nu(x_0, \dots, x_n) = 0$

$X^{-1}(U_n) \cap X$ задаётся в $\mathbb{A}^n = \pi^{-1}(U_n)$ уравнениями $\{\underline{f_\nu(u+pt) = 0}\}$

т.е. это аффинное алгебраическое многообразие в $\mathbb{A}^n = \pi^{-1}(U_n) = \underset{u}{U} \times \underset{t}{\mathbb{A}^1}$



$f_\nu(u+pt) =$

$= a_{n,\nu}(u) t^{n_\nu} + a_{n-1,\nu}(u) t^{n-1} + \dots + a_{0,\nu}(u)$

$$\begin{tikzcd} \Bbbk[X] = \dfrac{\Bbbk[u_1,\dots,u_{n-1},t]}{(f_\nu)} \arrow[r, dash, "\text{целая над}"] & \Bbbk[u_1\dots u_n] \arrow[l, bend left, "F^*"] \\ & \Bbbk[U_n] \arrow[u, phantom, "\shortparallel"] \end{tikzcd}$$

$$[u_i] \leftarrow u_i$$

Надо проверить, что t цел.

Надо в идеале (f_ν) найти многочлен со старшим к-том 1.

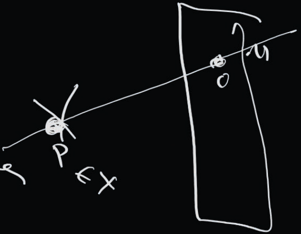
Такой мн-н $\exists \Leftrightarrow I < \Bbbk[u_1\dots u_n]$

$\nearrow$ идеал порождённый старшими к-тами мн-в f_ν содержит 1.

Если он не содержит $1 \Rightarrow$ по Т.Г.Н. $\exists u \in U_n$: все старшие к-ты обращаются в нуль

$f(tp+u)$

$\theta_0 p + \theta_1 u \quad t = \dfrac{\theta_0}{\theta_1}$



$(\theta_0 : \theta_1)$ однородные координаты

на $(pu) \simeq \mathbb{P}_1$, то $p = (1:0)$

$x = \theta_0 p + \theta_1 u \qquad f_\nu(x)$

$$f_\nu(\theta_0 p + \theta_1 u) = a^{(u)}_{n\nu}\theta_0^n + a^{(u)}_{n-1,\nu}\theta_0^{n-1}\theta_1 + \dots + a^{(u)}_{0,0}\theta_1^n$$

в точке u: все $a_{n,\nu}(u) = 0 \quad$ все $f_\nu \;\vdots\; \theta_1$

точке p является корнем $\quad p \in X$,

Это противоречит выбору точки p.

Проекция $\pi_p : X \to H$ конечна $\quad H \not\ni p$
$p \notin X$.

Любое проективное многообразие X допускает конечную сюрьекцию $X \twoheadrightarrow \mathbb{P}_n$

$X \neq \mathbb{P}_m \quad \exists p \notin X \quad \pi_p : X \to \mathbb{P}_{m-1}$

если $\pi_p(x) \neq \mathbb{P}_{m-1}$

$\exists p_1 : \pi_{p_1} : \pi_p(x) \to \mathbb{P}_{m-2}$

и т.д.

Любое аффинное $X \subset \mathbb{A}^m$ можно сюрьективно и конечно отобразить на аффинное пр-во $\mathbb{A}^4 \subset \mathbb{A}^3$

$\mathbb{A}^m \subset \mathbb{P}_m$ как стандартную аффинную карту $U_0 \subset \mathbb{P}_m$

рассмотрим $\overline{X} \subset \mathbb{P}_m \quad X \neq U_0$

$\Downarrow$

$\overline{X} \neq \mathbb{P}_n$

$\exists p \notin \overline{X}$, $p \notin U$

бесконечно удалённая точка не лежащая

в замыкании X.

Берём любую $H \subset \mathbb{P}_m$, $H \not\ni p$

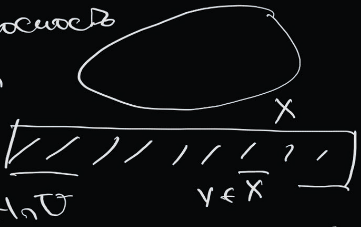
$\pi_p : \overline{X} \longrightarrow H$ конечная проекция

$X = \overline{X} \cap U \longrightarrow H \cap U$

конечное отображение ↗ аффинная гиперплоскость в U.

$\not\forall \ \partial v$

Параллельная проекция на аффинную гиперплоскость в неасимптотическом направлении конечна



Пример: $\mathbb{A}^n \supset V(f)$ $\quad f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$

X $\quad \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}_n$ $\quad x_0 x_1 \dots x_n$

$x_0 = 1$

$\overline{X} = V(\overline{f})$

$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1 \dots x_n) + \dots + f_d(x_1, \dots, x_n)$

f_i однородны степени i

$\overline{f}(x_0, \dots, x_n) = f_0 x_0^d + f_1(x_1 \dots x_n) x_0^{d-1} + \dots f_{d-1}(x_1 \dots x_n) \cdot x_0 + f_d(x_1, \dots, x_n)$

$\bar X \cap V(x_0)$ задаётся уравнением $f_d(x_1,\dots,x_n)=0$

ненулевой? многочлен.

$\boxed{f_d(v)\neq 0}$

проекция из точки $v=(v_1,\dots,v_{n-1},-1)$ $\mathbb{P}_n \to \{x_n=1\}$

конечный? морфизм $\exists$

Параллельная проекция вдоль вектора $v=(v_1,\dots,v_{n-1},-1)$ на гиперплоскость $x_n=0$.

$$\underline{(x_1,\dots,x_n)} \longrightarrow \underline{(x_1+v_1x_n,\dots,x_{n-1}+v_{n-1}x_n,0)}$$

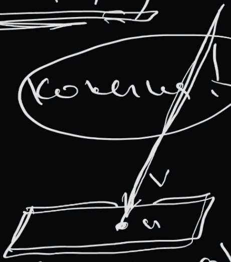
$$\downarrow +vt$$

$$\underline{(x_1+v_1t,\dots,x_{n-1}+v_{n-1}t,x_n-t)}$$

$$\underline{t=x_n}$$

$\boxed{\text{доминантно}}$

$\boxed{\text{Конечно!}}$



$(u_1,\dots,u_{n-1})+v(t)$

$f(x_1,\dots,x_n)=0$

$f(u+vt) =$ $\qquad x = u+vt$

$= t^n f_0(u) + t^{n-1} f_1(u) + \dots$

$u \notin \pi(x) \Leftrightarrow$ многочлен имеет корень $\Leftrightarrow \neq \mathrm{const}$

$$\exists\, f_i(u) \neq 0$$

плотное открытое множество.

Вывод: Гиперповерхность в $\mathbb{A}^n$ можно конечным сюрьективным отображением спроектировать на гиперплоскость.