Лекция 14 апреля (вторая половина)

Свойства размерностей!

(1) $\dim \mathbb{A}^n = n$ $\qquad \{0\} \subset \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{A}^2 \subset \dots \subset \mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$

цепочка линейных подпр-в.

$$\Downarrow$$

$\dim \mathbb{A}^n \geq n$.

Обратное нер-во по индукции.

Пусть $\dim \mathbb{A}^{n-1} = n-1$

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq \underset{\neq \mathbb{A}^n}{\underrightarrow{X_{m-1}}} \subsetneq X_m = \mathbb{A}^n$$

$\exists$ конечная сюръекция $X_{m-1} \twoheadrightarrow \mathbb{A}^k \subset \mathbb{A}^n$

$k < n$

$\dim X_{m-1} = k \qquad m-1 < n$

$$\Downarrow$$

$\dim \mathbb{A}^n = m \leq n$

(2) Если X - неприводимо и $X \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{A}^n$ -

конечная сюръекция, то $\dim_x X = n$

и не зависит от выбора сюръек.

$\forall x \in X$ и

уии.

$\boxed{X} \to \underline{\underline{\mathbb{A}^n}}$ $\quad \dim_x X \geq n$ у сюрр.

$\dim = n \quad \dim_x X \leq n$ у конечност

(3) $\underset{\neq \text{const.}}{f} \in \mathbb{k}[X]$ непостоянная функция

$$\underline{\underline{\dim V(f) = \dim X - 1.}}$$

Фиксируем конечную сюръекцию

$$\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n \qquad n = \dim X.$$

$$\varphi : \pi \times f : X \longrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$$

$$x \longrightarrow (\underset{u}{\pi(x)}, \underset{t}{f(x)})$$

$$\varphi^* : \mathbb{k}[u_1, \dots, u_n, t] \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{k}[X]}} \supset \underset{\mathbb{k}[u_1, \dots u_n]}{\underset{\shortparallel}{\pi^* \mathbb{k}(\mathbb{A}^n)}}$$

$g(u,t)$ вычислим его при $t = f \in \mathbb{k}[X]$

$$g(u,t) \to g(u,f)$$

Мы видим, что это конечная сюръекция

на гиперповерхность $\underline{\underline{V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1}}$

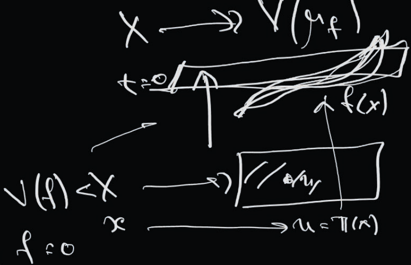
$\mu_f(u,t)$ – минимальный многочлен элемента f над $\mathbb{k}[u_1, \dots, u_n]$

$\|$

минимальным многочленом

f над $\mathbb{k}(u_1 \dots u_n)$

$$\mu_f(t) = t^n + a_1(u)t^{n-1} + \dots + a_{n-1}(u)t + \boxed{a_0(u)}$$



$$\begin{tikzcd} V(t) \subset X \arrow[d, two heads, "\psi"] \\ V(\mu_f) \cap V(t) \end{tikzcd}$$

$t=0$

в $\mathbb{A}^n$ задаётся уравнением $a_0(u)=0$

$V(t) \simeq \mathbb{A}^n$ с коорд $u_1 \dots u_n$

$\underline{V(a_0)} \subset \mathbb{A}^n$

$\dim V(a_0) = n-1$ т.к. оно сюръективно и конечно проектируется на $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$.

$$\begin{tikzcd} \psi: V(f) \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & V(a_0) \arrow[d, phantom, "\cap" description] \\ X & \mathbb{A}^n \end{tikzcd}$$

$\dim V(f) = \dim V(a_0)$
$\| $
$n-1$

$\Downarrow$

$\dim V(f) = n-1.$

④ $\forall$ набора функций $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{k}[X]$

$\forall p \in V(f_1, \dots, f_n)$ $\dim_p V(f_1 \dots f_n) \geq$

$\geq \dim X - n$

если $\forall i$ $[f_i]$ не делит нуль в $\Bbbk[X]/(f_1,\dots,f_{i-1})$, то неравенство превращается в равенство.

Док-во: Индукция. Можно считать X неприводимым (заменить X на макс. неприводимую компоненту через p).

$\dim \underline{V(f)} = \underline{\underline{\dim X - 1}}$ если $f \neq \mathrm{const}$,

либо $f \equiv 0$ на X $\Leftrightarrow$ f делит нуль в $\Bbbk[X]$ если X неприводим

$\boxed{V(f) = X}$

Замечание: случай $V(f_1,\dots,f_n) = \varnothing$ бывает и теорема тривиально верна.

Если f_i не делит нуль в $\Bbbk[X]/(f_1 \dots f_{i-1})$ последовательность $(f_1,\dots,f_n)$ наз. регулярной, $V(f_1)\cap\dots\cap V(f_n)$ наз. полным пересечением.

Пример: (А) $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n$ замкнутые проективные,

то $\dim X_1 + \dim X_2 \geq n \Rightarrow X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

(Б) $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$, то

$\dim(X_1 \cap X_2) \geq \dim X_1 + \dim X_2 - n$

Док-во (Б): $\dim X_1 = k_1$ $\quad X_1 \xhookrightarrow{\varphi_1} \mathbb{A}^n$

$\dim X_2 = k_2$ $\quad X_2 \xhookrightarrow{\varphi_2} \mathbb{A}^n$

$\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$

задаётся n уравнениями

$x_i = y_i$

$X_1 \times X_2 \xrightarrow{\varphi_1 \times \varphi_2} \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$

$(x_1, x_2) \to (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$.

$\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$

$x_i = y_i$

$\boxed{\dim X_1 \times X_2 = k_1 + k_2}$ $\quad X_1 \cap X_2 = \varphi^{-1}(\Delta)$

$\pi_1 : X_1 \twoheadrightarrow \mathbb{A}^{k_1}$ $\quad \Bbbk[X_1] \hookleftarrow \Bbbk[x_1 \ldots x_{k_1}]$

цел

цел

$\pi_2 : X_2 \twoheadrightarrow \mathbb{A}^{k_2}$ $\quad \Bbbk[X_2] \hookleftarrow \Bbbk[y_1, \ldots, y_{k_2}]$

$\pi_1 \times \pi_2 : X_1 \times X_2 \twoheadrightarrow \mathbb{A}^{k_1} \times \mathbb{A}^{k_2} = \mathbb{A}^{k_1 + k_2}$

$(\pi_1 \times \pi_2)^* : \Bbbk[x, y] \to \Bbbk[X_1] \otimes \Bbbk[X_2]$

конечно порождена

конечная сюрьекция

$X_1 \cap X_2 < X_1 \times X_2$ тоже задаётся n уравнениями $(\varphi_1 \times \varphi_2)^*(x_i) = (\varphi_1 \times \varphi_2)^*(y_i)$

$$\dim_x X_1 \cap X_2 \geq \dim X_1 + \dim X_2 - n$$

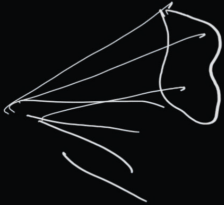
$$\boxed{\forall x \in X_1 \cap X_2}$$

Док-во (A)

$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$

$\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$

$X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n \rightsquigarrow$ конусы $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 < \mathbb{A}(V)$ задаваемые теми же самыми уравнениями.



$\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2$ не пусто, т.к. содержит 0.

$\dim \tilde{X}_1 = \dim X_1 + 1$

$\dim \tilde{X}_2 = \dim X_2 + 1$

$\dim X_1 \cap X_2 = \dim \tilde{X}_1 + \dim \tilde{X}_2 - (n+1) =$

$= \dim X_1 + \dim X_2 - n$

$\dim X_1 + \dim X_2 \geq n \Rightarrow \boxed{\dim X_1 \cap X_2} \geq 0$

непусто

т.к. $\dim \tilde{X}_1 + \dim \tilde{X}_2 - (n+1) \geq 1$

непусто.

$\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2 \neq (0)$

Если $X \xrightarrow{\varphi} Y$ регулярный морфизм.

то $\forall x \in X$ $\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq \dim X - \dim Y$

непустой слой

если φ доминантный, то $\exists$ открытое подмножество $U \subseteq Y$: $\forall y \in U$

$\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$

$\forall x : \varphi(x) = y$.

$V \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} W$

для

$\dim \varphi^{-1}(\varphi(v)) = \dim \ker \varphi = \dim V - \dim \operatorname{im} \varphi$

Неравенство $\geq$ очевидно.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right] & Y \arrow[r, twoheadrightarrow] & \mathbb{A}^{\dim Y}
\end{tikzcd}$$

можно считать, что X и Y аффинные

заменяя Y на открытую аффинную окрестность $W \ni \varphi(x)$, а X - на аффинную открытую окрестность $U \ni x$: $\varphi(U) \subset W$

можно считать $Y = \mathbb{A}^k (x_1 \ldots x_k)$

$\varphi(x) = (p_1 \ldots p_k)$. $\underline{\varphi : X \to \mathbb{A}^k \xrightarrow{x_i}}$

$\varphi^{-1}(\varphi(x))$ задаётся k уравнениями

$$\varphi^*(x_i) = p_i \qquad i = 1, \ldots, k$$

k уравнений $\dim \varphi^{-1}(p) \geq \dim X - k$

Вторую половину докажем в след. раз.