Лекция 21 апреля (первая половина)

Теорема: $X \xrightarrow{\varphi} Y$ регулярный доминантный морфизм неприводимых многообразий, то

(1) $\forall x \in X \quad \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq \dim X - \dim Y$

(2) $\exists$ открытое плотное $U \subset Y : \forall y \in U$
$\forall x \in \varphi^{-1}(y) \quad \dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim X - \dim Y.$

В прошлый раз доказали (1) $X \to Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$.

$m = \dim Y$

непустой слой $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^m$

это пересечение m гиперповерхностей:

$$\dim \varphi^{-1}(p) \geq \dim X - m$$

Докажем (2)   можно считать X и Y аффинными

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "\psi"'] & Y & & \Bbbk[Y] \arrow[r, hook, "\varphi^*"] \arrow[d] & \Bbbk[X] \\
& Y \times \mathbb{A}^n \arrow[u, "\pi"'] \arrow[rr, phantom, "\longleftrightarrow \ \pi^*"] & & \Bbbk[Y][\underbrace{t_1 \dots t_n}_{n}] \arrow[ur, two heads, "\psi^*"] &
\end{tikzcd}$$

конечно порождённая $\Bbbk[Y]$-алгебра.

$$\Bbbk[X] = \frac{\Bbbk[Y][t_1 \dots t_m]}{I}$$

можно считать, что $X \subset Y \times \mathbb{A}^n$ замкнутое подмногоодачие $\varphi: X \to Y$ ограничение проекции

$Y \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow Y.$

$X \subset \mathbb{A}^n$

$\bar{X} \subset \mathbb{P}^n \supset \mathbb{A}^n = U_0$

$p \notin \bar{X}$ $p \in U_0$

$p: \bar{X} \longrightarrow H$

ограничение на X будет конечным морфизмом на $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$

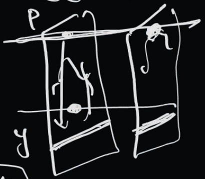
$\underset{H \cap U_0}{\overset{\shortparallel}{}}$

$$\begin{array}{ccc} X & \subset & Y \times \mathbb{A}^n \\ \cap & & \cap \\ \bar{X} & \subset & Y \times \mathbb{P}^n \end{array}$$

$\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ как карта U_0 $x_0 \neq 0$.

$p \notin \bar{X}$

НФР.



$\boxed{\text{в слое над } y}$

проекция из p $\bar{X} \to H$ будет конечна, её ограничение $p: X \to H \cap U$ тоже будет конечна.

та же картина будет во всех слоях где кроме $y \in \pi((Y \times \{p\}) \cap \bar{X})$

↑ замкнуто в $Y \times \mathbb{P}^n$

$$\begin{tikzcd} Y \times \mathbb{P}^n \arrow[d, "\pi"] \\ Y \end{tikzcd}$$

$\boxed{\pi \text{ — замкнутый морфизм?}}$

проекция будет конечна во всех слоях $\pi^{-1}(y)$ вне замкнутого множества $Z = \pi((Y\times\{p\})\cap\overline{X})$

Заменяем Y на аффинное многообразие $D(f) \subset Y \setminus Z$

$$\boxed{X \longrightarrow Y\times A^{n-1}}$$

(конечный? и послойно конечный)

$\exists$ конечный? морфизм = проекция у p

Будем итерировать эту процедуру пока не получим разложение:

$$\begin{tikzcd} & Y\times A^k \arrow[d, two heads] \\ X \arrow[ur, two heads, "\text{конечный эпиморф}"] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

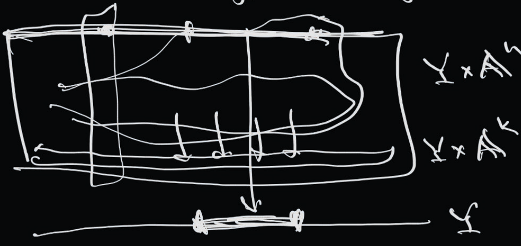
конечный послойно? конечный? эпиморфизм,

$\pi^{-1}(y) = A^k$

$\varphi^{-1}(y) \longrightarrow y \in Y$

$\dim X = \dim Y + k$

$\dim \varphi^{-1}(y) = k = \dim X - \dim Y$



Следствия:

(1) Полунепрерывность сверху размерностей слоёв

$X \to Y$ любой регулярный морфизм

$X_k = \{x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq k\}$

замкнуты $\forall k$

Док-во: индукция по $\dim Y$.

$\dim Y = 0$ доказывать нечего

Для всех Y с $\dim Y < n$ теорема верна

$\forall$ морфизмов $X \xrightarrow{\varphi} Y$.

$$\boxed{\forall x \in X. \quad \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq \dim X - \dim Y}$$

по (1) в теореме. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $k \leq \dim X - \dim Y$

$X_k = X$ — замкнуто.

$$\boxed{k > \dim X - \dim Y.}$$

$\varphi(X_k) \subset \underset{\overset{\shortparallel}{Z}}{Y \setminus U}$

где $U \subset Y$ — это открытое плотное подмн-во из (2): $\forall y \in U$ $\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$ $\forall x \in \varphi^{-1}(y)$.

$\dim Z < \dim Y$.

можно заменить Y на Z

а X — на $\varphi^{-1}(Z)$

и воспользовался
индуктивным предположением)

Следствие 2: Если $\underline{X \xrightarrow{\varphi} Y}$ замкнутый морфизм, то $Y_k = \{y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geq k\}$ замкнуты в Y.

$$\{y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geq k\} = \boxed{\varphi(X_k)}$$

Следствие 3 Размерностный критерий неприводимости:

Пусть $\varphi: X \to Y$ замкнутый морфизм, все слои которого неприводимы и имеют одинаковую размерность. Тогда если Y неприводимо, то и X неприводимо.

Док-во Пусть $X = X_1 \cup X_2$ $\quad X_i \neq X$.

$$Y_i = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_i\} \qquad \underline{i = 1, 2}$$

$\varphi^{-1}(y)$ неприводим $\quad \underline{\varphi^{-1}(y)} = (X_1 \cap \varphi^{-1}(y)) \cup (X_2 \cap \varphi^{-1}(y))$

$\varphi^{-1}(y)$ либо лежит в X_1 либо в X_2

$Y = Y_1 \cup Y_2 \qquad Y_i \neq Y$

?

Y_1 – это точки, в которых слои ограничения $\varphi|_{X_1} : X_1 \longrightarrow Y$ имеют максимально возможную размерность

$X \longrightarrow Y$

$Y_{max} < Y$ – замкнуто.

$Y = Y_1 \cup Y_2$ – приводимо

Как искать размерности проективных многообразий? $X < \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$

$\dim X = d.$

$X \cap H \neq 0$ для любой гиперплоскости $\dim H \geq n-d.$

$H < \mathbb{P}_n$

$\dim X = \max d : X \cap H \neq \emptyset$ для любой гиперплоскости коразмерности d.

Док-во: Покажем, что "общая" гиперплоскость H' с $\operatorname{codim} H' > d$ не пересекает X.

гиперплоскости $H' < \mathbb{P}_n$ = векторные подпр-ва $U < V$

$\dim H' = n-d-1$ $\qquad$ $\dim U = n-d.$

$$\| $$

$$Gr(n-d, V)$$

$$\dim Gr(n-d, n+1) = (n-d)(d+1)$$

$Gr(k,n)$

$\dim G(k,n) = k(n-k)$

$$\boxed{\text{Тут } \exists \text{ открытое и плотное } \mathcal{U}:\ \forall H' \in \mathcal{U}\ \ H' \cap X = \varnothing}$$

Многообразие инцидентности

$$\Gamma = \{(x, H') \in X \times Gr(n-d, V) \mid x \in H'\}$$

$$\cap$$

$$X \times Gr(n-d, V)$$

замкнутое подмногообразие

проективное

$$\begin{tikzcd} X & \Gamma \arrow[l, two heads, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & Gr \end{tikzcd}$$

π_1 - сюръективно $\quad \pi_1^{-1}(x) - \underbrace{\text{это все } H' \ni x}$

$$Gr(n-d-1, V/k \cdot x)$$

$\underline{\underline{n}}$

все слои π_1 - это неприводимые многообразия размерности $(n-d-1)(d+1)$

$\Downarrow$

Если $X \subset \mathbb{P}_n$ неприводим, то Γ - неприводимое проективное многообразие

$$\dim \Gamma = \underset{\underset{\dim X}{\|}}{d} + (n-d-1)(d+1)$$

$$\Gamma \xrightarrow{\pi_2} Gr(n-d, n+1)$$

$$= \underset{\underset{G}{\|}}{\underline{(n-d)(d+1)}}$$

$$= (n-d-1)(d+1) + (d+1)$$

$\dim G = \dim \Gamma + 1$

π_2 не эпиморфна $\Rightarrow$ образ собственное замкнутое подмногообразие.

$$\boxed{\dim \pi_2(\Gamma) \leq \underline{\dim G - 1}}$$

неприводимая гиперповерхность в грассманиане

" = " $\Leftrightarrow$ общий слой?

проекции π_2 имеет размерность 0

$X \xrightarrow{\varphi} Y$,

$\dim \overline{\varphi(X)} + \dim$ общего слоя $=$

$= \dim X$

H размерности n-d

$$\begin{tikzcd} \Gamma' = \{(x,H) \in X \times Gr(n-d+1,\ n+1)\} \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X & \boxed{Gr} \end{tikzcd}$$

$\underline{(n-d+1)d}$

π_1 – эпиморфизм, и все слои

$Gr(n-d, n)$ $\dim = (n-d)d$

$$\dim\Gamma' = \underset{d}{\dim X} + (n-d)d = \underline{(n-d+1)d}$$

$$\boxed{\dim\Gamma' = \dim Gr}$$

$\underline{\pi_2 \text{ сюръективно}}$ ⇐ у π_2 есть нульмерный? слой.

$\dim \pi_2(\Gamma') = \dim\Gamma' +$

$+ \dim$ общего слоя

$\boxed{\text{Общий? слой нульмерный?}}$

общая d-мерная плоскость пересекает X по конечному числу точек,

∃ (d-1)-мерная

⟹ H' пересекающая X по

H' $\dim H' = d-1$ конечному числу точек.

$\Downarrow$

предыдущая проекция

$$\Gamma \xrightarrow{\pi} Gr(n-d, V)$$

имеет 0-мерный слой $\Rightarrow$

общий слой нульмерный $\Rightarrow$

$$\dim \pi(\Gamma) = \dim \Gamma$$

$\pi(\Gamma)$ - гиперповерхность в Gr.