Лекция 21 апреля (вторая половина)

Результант:

$$\begin{cases} f_0(x_0 \dots x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_0 \dots x_n) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Система из $(n+1)$ однородных уравнений фиксированных степеней $d_0, \dots, d_n$.

Теор: Результантное условие одно, т.е. $\exists$ неприводимый многочлен (зависящий только от $d_0, \dots, d_n$) от коэффициентов полиномов $f_0, \dots, f_n$, который обращается в нуль если и только если система имеет ненулевое решение.

Капранов Зелевинский

Детерминанты и результанты

$R = \{ (S_0, \dots, S_n) \mid \cap S_i \neq \emptyset \}$

$S_i \subset \mathbb{P}_n$ гиперповерхность степени d_i

$S_i \in \mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}(S^{d_i} V^*)$ $\qquad$ $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$

$R \subset \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$

- надо доказать, что это неприводимая гиперповерхность.

$$\Gamma \subset \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n$$

$$\parallel$$

$$\{ ((S_0, \dots, S_n), p) \mid p \in S_0 \cap \dots \cap S_n \}$$

замкнутое проективное многообр.

где $f_i(p) = 0 \quad i = 0, \dots, n$

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
\underline{\underline{\prod \mathbb{P}_{N_i}}} & & \mathbb{P}_n
\end{tikzcd}$$

$\dim = \sum N_i$

$p \in \mathbb{P}_n \quad \pi_2^{-1}(p) = \prod \mathbb{P}_{N_i - 1}$

$\boxed{f(p)=0}$ $f \in S^d V^*$

гиперплоскость в $\mathbb{P}(S^d V^*)$

линейное уравнение на f

Γ - неприводимо $\dim \Gamma = \sum_{i=0}^{n} (N_i - 1) + n =$

$$= \underline{\underline{\left(\sum N_i\right) - 1}}.$$

$R = \pi_1(\Gamma)$

$\dim \pi_1(\Gamma) = \left(\sum N_i\right) - 1 \iff$ у π_1 общий слой нульмерен $\iff \exists$ нульмерный слой

$\pi_1^{-1}(s_0, \dots, s_n) = \{p \in S_1 \cap \dots \cap S_n\}$

$\boxed{\cap S_i}$

$S_i = \varphi_i^{d_i}$ $\varphi_i \in V^*$ $V(\varphi_i^{d_i})$

есть слои состоящий из точ.

R - неприводимая гиперповерхность

Расширения Полей

$\mathbb{F} \supset \Bbbk$ конечное расширение, если

$\dim_{\Bbbk} \mathbb{F} < \infty$ расмерность как векторного пр-ва над $\Bbbk$

$\|$

$[\mathbb{F} : \Bbbk] = \deg \mathbb{F} / \Bbbk$ степень $\mathbb{F}$ над $\Bbbk$

(1) Каждый элемент $\varsigma \in \mathbb{F}$ алгебраичен над $\Bbbk$: $\varsigma : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ $x \mapsto \varsigma x$

линейный оператор на конечномерном пр-ве

$\chi_\varsigma(\varsigma) = 0$, $\chi_\varsigma(t) = \det(tE - \varsigma)$

алгебраичность над $\Bbbk$ = целость над $\Bbbk$

---

(2) $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$

$\Bbbk[a_1, \dots, a_n]$ – наименьшую $\Bbbk$-подалгебру, порождённую $a_1, \dots, a_n$

$\|$

$$\operatorname{im}\left(ev_{a_1 \dots a_n} : \Bbbk[t_1 \dots t_n] \longrightarrow \mathbb{F},\quad f(t) \longmapsto f(a_1 \dots a_n)\right)$$

цела над $\Bbbk$ не имеет делителей нуля

$\Downarrow$

является полем (подполем в $\mathbb{F}$)

(3) $\mathbb{E}_1 < \mathbb{E}_2 < \mathbb{E}_3$ $[\mathbb{E}_3 : \mathbb{E}_2]\cdot[\mathbb{E}_2 : \mathbb{E}_1] =$

$= [\mathbb{E}_3 : \mathbb{E}_1]$

$a_1 \dots a_k$ - базис $\mathbb{E}_2$ как векторного пр-ва над $\mathbb{E}1$

$b_1 \dots b_m$ - базис $\mathbb{E}_3$ как векторного пр-ва над $\mathbb{E}2$

$\Downarrow$

$a_i b_j$ - базис $\mathbb{E}_3$ над $\mathbb{E}_1$

$\xi \in \mathbb{E}_3$ $\quad \xi = \sum x_i b_i \quad x_i \in \mathbb{E}_2$

$x_i = \sum y_{ij} a_j \quad y_{ij} \in \mathbb{E}_1$

$$\xi = \sum_{ij} y_{ij} a_j b_i$$

$a_i b_j$ линейно порождают $\mathbb{E}_3$ над $\mathbb{E}'$

Они линейно независимы.

$$\sum_{ij} y_{ij} a_i b_j = 0$$

$$\sum_j \underset{\overset{\cap}{\mathbb{E}_2}}{\left(\sum_i y_{ij} a_i\right)} \cdot b_j = 0 \quad \Rightarrow \text{все } \sum y_{ij} a_i = 0$$

$\Downarrow$

все $y_{ij} = 0$

(4) $f \in \Bbbk[x]$ неприводимый многочлен

$\mathbb{F} = \frac{\Bbbk[x]}{(f)}$ без делителей нуля

поле

в $\mathbb{F}$ у f есть корень $\theta = [x]_f$

$\Bbbk \subset \mathbb{F} = \boxed{\frac{\Bbbk[x]}{(f)}} = \underbrace{\Bbbk[\theta]}$, ← простое расширение

простое расширение, порождённое элементом θ.

Предупреждение f над $\Bbbk[\theta]$ не обязательно полностью раскладывается на линейные множители!

Следствие: $\forall f \in \Bbbk[x]$ $\exists$ конечное расширение $\mathbb{E} \supset \Bbbk$ в котором f полностью раскладывается на линейные множители.

Пример: $f(t) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \in \Bbbk[x]$ неприводимый

$\mathbb{F} = \frac{\Bbbk[x]}{(f)}$ $f(x) = (x-\theta)\,q(x)$

квадратный? трёхчлен.

$q \in \mathbb{F}[x]$

(А) $q(x)$ неприводим → $\mathbb{L} = \frac{\mathbb{F}[x]}{(q)} \supset \mathbb{F}$

(Б) $q(x) = (x-\theta_1)(x-\theta_2)$
$\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{F}$

Что имеет место А или Б видно по дискриминанту f.

$$D(f) = (\theta-\theta_1)^2(\theta-\theta_2)^2\underbrace{(\theta_1-\theta_2)^2}$$

симметричен по $\theta, \theta_1, \theta_2$
‖
(многочлен от коэф-тов f.)

над $\mathbb{L}$

$f = (x-\theta)(x-\theta_1)(x-\theta_2)$
$\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{L}$

$[\mathbb{L} : \Bbbk] = 6$

$D(f) \in \Bbbk$.

$$D(f) = (\theta-\theta_1)^2(\theta-\theta_2)^2\,\underline{D(q)}$$

(Б) $\Leftrightarrow$ $D(q)$ является полным квадратом в $\mathbb{F}$
$\Updownarrow$
$D(f)$ является квадратом в $\mathbb{F}$
$\Updownarrow$
$D(f)$ является квадратом в $\Bbbk$

$[\mathbb{E}:\mathbb{k}]=3$ $\quad a=\alpha^2 \quad \underline{\alpha\in}\,\mathbb{E} \Rightarrow \alpha\in\mathbb{k}.$

$\alpha\notin\mathbb{k} \Rightarrow t^2-a$ неприводим в $\mathbb{k}[x]$

$$\mathbb{K}=\frac{\mathbb{k}[x]}{(x^2-a)} \hookrightarrow \mathbb{E}$$

$$x \longmapsto \alpha$$

$$x^2-a \longmapsto \alpha^2-a=0$$

$[\mathbb{K}:\mathbb{k}]=2 \qquad [\mathbb{E}:\mathbb{k}]=3$

$$\mathbb{K}\not\subset\mathbb{E}$$

$D(f)$ является квадратом в $\mathbb{k}$ $\Longleftrightarrow$

f полностью раскладывается на линейные множители уже в $\frac{\mathbb{k}[x]}{(f)}$

в поле степени 3