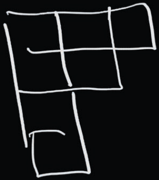
лекция 28 октября (первая половина)

Числа Костки $K_{\lambda,\eta}$ = количество таблиц Юнга формы λ и содержания

η :



$\lambda : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ диаграмма Юнга

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ или тоже диаграмма Юнга, т.е. считать, что $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots$ В клетки диаграммы λ надо поместить η_1 единиц, η_2 двоек, … η_k k-шек … так, чтобы получилась таблица, т.е. числа по строкам нестрого растут, а по столбцам строго растут.

$K_{\lambda,\eta} \neq 0 \Rightarrow \lambda \trianglerighteq \eta$

$\lambda_1 \geq \eta_1$

$\lambda_1 + \lambda_2 \geq \eta_1 + \eta_2$

$\dots$

$$s_\lambda(x) = \sum x_1^{\eta_1} \dots x_m^{\eta_m} \cdot K_{\lambda\eta}$$

Напоминание

$$s_\lambda(x) = \sum_{\eta \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda\eta} m_\eta(x)$$

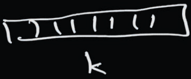
Выразить $e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_m}$ через $s_\nu(x)$.

$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_m}$

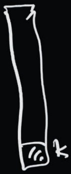
$h_k(x)$ = сумма всех мономов полной степени k

$\|$

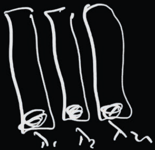
$s_{(k)}(x)$



a =



$$h_\lambda = s_{\mathcal{O}_{(\lambda_1)} \otimes \mathcal{O}_{(\lambda_2)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{(\lambda_m)}}$$



коэфф-т при $s_\nu(x)$ это число орбит типа ν в $\mathcal{O}_{(\lambda_1)} \otimes \mathcal{O}_{(\lambda_2)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{(\lambda_m)}$

упаковки в лево-диаграммы типа ν.

строчный? вес $= \nu$

Строчная развёртка плотного вида массива формы ν — это таблица формы ν.

$\Downarrow$

Коэфф-т при $S_\nu(x)$ равен $K_{\nu,\lambda}$ = таблицы формы ν и содержания λ

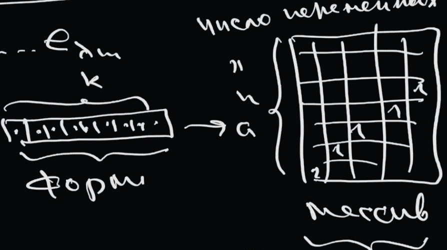
$\boxed{5\ 4\ 3}$

$\underbrace{111}_{5}\ \underbrace{2\ldots2}_{4}\ \underbrace{3\ldots3}_{3}$

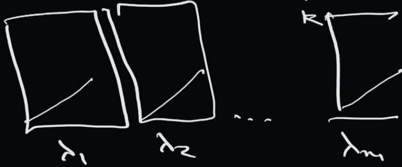
$$\boxed{h_\lambda = \sum_\nu K_{\nu,\lambda}\cdot S_\nu(x)}$$

$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2}\cdots e_{\lambda_m}$

$e_k = S_{(1^k)}$ λ:



$e_{\lambda_1} e_{\lambda_2}\cdots e_{\lambda_m}$



Сколько DU-орбит типа ν в тензорном произведении $\mathcal{O}_{1^{\lambda_1}}\otimes\mathcal{O}_{1^{\lambda_2}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{O}_{1^{\lambda_m}}$

$\shortparallel$

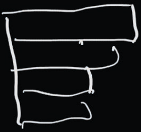
вид массивов формы ν

плотных (строчного веса ν = уплотняющиеся влево до диаграммы ν)

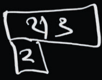
Т.к. в каждом

$\in \mathcal{O}_{1^{\lambda_k}}$

все шарики в разных столбцах, то вклад в каждую компоненту столбца веса даёт максимум 1 шарик.



Вписать в 1-ю строку номер того массива шарик из которого даёт вклад в показатель ν_1



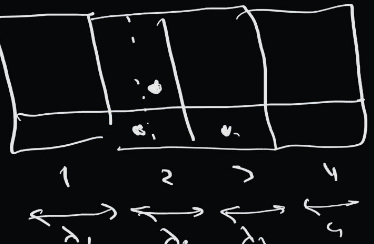


Диаграмма ν заполнена λ_1 1-ками, λ_2 2-ками, … λ_i i-шками так, что они строго возрастают по строкам

По столбцам — нестрого возрастают (из-за плотности вниз)

$$\text{коэфф-т} = K_{\nu^+,\lambda}$$

$$\boxed{e_\lambda(x) = \sum_\nu K_{\nu^+,\lambda} S_\nu(x)}$$

$$\boxed{h_\lambda(x) = \sum_\nu K_{\nu,\lambda} S_\nu(x)}$$

Инволюция $\omega : \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda : \; e_\lambda \leftrightarrow h_\lambda$

$e_k \leftrightarrow h_k$

действует на мн-ны Шура по правилу $\omega(S_\lambda) = S_{\lambda^t}$

Док-во:: $\omega' : \Lambda \underset{\sim}{\to} \Lambda \quad S_\lambda \leftrightarrow S_{\lambda^t}$

Сл:

$$S_\lambda(x) = \det \begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \dots \\ & \ddots & \\ & h_{\lambda_m-1} & h_{\lambda_m} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

2-я формула Джамбелли

$$S_{\lambda^t}(x) = \det \begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & \dots & \dots \\ & \ddots & \\ \dots & \dots & e_{\lambda_m} \end{pmatrix}$$

Теория Представлений

R - множество

Представление множества R в векторном пр-ве V — это отображение множеств

$\rho: R \to \mathrm{End}(V)$ $\Longleftrightarrow$ Для каждого

$f \in R$ надо задать оператор $\rho(f): V \to V$

$\rho(f)v$ сокращают до fv

$\rho(R) \subset \mathrm{End}(V)$ подмножество операторов

$\mathrm{Ass}(\rho(R))$ — ассоциативная оболочка мн-ва $\rho(R)$

$\|$

Всё что можно получить из $\rho(R)$ композициями и взятием линейных комбинаций. Это ассоциативная алгебра.

Другой способ задать $\mathrm{Ass}(\rho(R))$:

$V_R = R \otimes \Bbbk$ = пр-во с базисом R

$\|$

формальные конечные линейные комбинации элементов из R

$\Bbbk^R$ отличается от $R \otimes \Bbbk$ если R бесконечн

$\|$ $\{R \to \Bbbk\}$

$\|$ функции с конечным носителем.

$A_R := TV_R$ тензорная алгебра пр-ва V_R

свободная ассоциативная алгебра с базисом R = некоммутативные многочлены от элементов R

$$\begin{tikzcd}
\rho : R \arrow[r] \arrow[d, squiggly] & \mathrm{End}(V) \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{гомоморфизм алгебр } \hat{\rho} : A_R \to \mathrm{End}(V) \\
V_R \arrow[r] \arrow[d, squiggly] & \mathrm{End}(V) & \\
TV_R \arrow[r] & \mathrm{End}(V) &
\end{tikzcd}$$

Если есть ассоц. алгебра A, то гом-м алгебр $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$ наз. линейным представлением алгебры A в векторном пр-ве V

$$\mathrm{Ass}(\rho(R)) = \mathrm{im}(\hat{\rho}).$$

$$t = \sum_{\substack{f_1 \dots f_k \in R \\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} x_{f_1, \dots, f_k} f_1 \otimes \dots \otimes f_k \in A_R \qquad x_{f_1,\dots,f_k} \in \Bbbk$$

$f_i \in R$

$$\rho : R \to \mathrm{End}(V)$$

$$\hat{\rho}(f)\ \sum x_{f_1 \dots f_k}\, \rho(f_1) \circ \rho(f_2) \dots \circ \rho(f_k)$$

Терминология

если задано представление
$\rho : R \to \mathrm{End}(V)$ ($\Leftrightarrow \rho : A_R \to \mathrm{End}(V)$)
то V называют R-модулем (или A_R-модулем).

- V наз. неприводимым представлением (или простым модулем) если у V нет нетривиальных (отличных от 0 и V) R-подмодулей (R-инвар. подпространства).
- V наз. разложимым, если $V = U \oplus W$ где $U, W \subset V$ – нетривиальные R-подмо.

дум

- Всякий конечномерный R-модуль — это прямая сумма неразложимых.
- Неприводимые неразложимы, обратное неверно.

V наз. полупростым модулем (или вполне приводимым представлением) если $V = \bigoplus V_i$, где все V_i — неприводимы.

- Всякий неприводимый вполне приводим