лекция 4 ноября (первая половина)

Полупростые модули над множеством R операторов ⟺ над ассоциативной алгеброй A_R — свободной ассоциативной алгеброй с базисом R.

- Если модуль W (не обязательно конечномерный) порождается линейно простыми подмодулями, то (1) он полупрост (является прямой суммой простых подмодулей) (2) $\forall$ подмодуля $U \subsetneq W$ $\exists$ дополнительный подмодуль V: $U \oplus V = W$ и этот V можно выбрать в виде прямой суммы простых подмодулей из числа тех, что порождают W.

Факт: Модуль W (не обязательно конечномерный) полупрост ⟺ (1) любой $\neq 0$ подмодуль в W имеет простой ненулевой подмодуль (2) У каждого ненулевого подмодуля есть дополнительный подмодуль
($\forall\ U \subsetneq W\ \exists T: U \oplus T = W$)

$\Rightarrow$ если W полупрост, то он линейно порождается простыми $\Rightarrow$ У любого подмодуля есть дополнительный $\quad U \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{сумма} \\ \text{простых}}}{V} = W$

$\pi : W \to U$ проекция вдоль V

$u+v \mapsto u$

гомоморфизм R-модулей

$$f(u+v) = \underset{\underset{U}{\cap}}{fu} + \underset{\underset{V}{\cap}}{fv} = fu$$

Т.к. W порождается простыми подмодулями какой-то из них спроектируется не в 0

$S < W$ - простой $\quad \pi(S) \neq 0$

$\nearrow$ простой подмодуль.

$M \subset \pi(S) \Rightarrow \quad \pi^{-1}(M) \cap S$ - подмодуль в S

$\Downarrow$

$\pi(S) = M = \pi(\pi^{-1}(M) \cap S) \Leftarrow \pi^{-1}(M) \cap S = S$

(1) тоже верно.

$\Leftarrow$ S все полупростые подмодули в W

$P_1 \leq P_2$ если $P_2 = P_1 \oplus P_1'$,

где P_1' - тоже полупрост.

S – это полный ЧУМ (непустой!)

максимальный элемент в S совпадает с W, если макс. элемент $U \subsetneq W$

то $W = U \oplus V$ и в V есть простой подмодуль U'

$U \oplus U' \supset U$ противоречие.

Замечание: Если $\dim W < \infty$ то тогда любой ненулевой подмодуль минимальной возможной размерности автоматически прост.

Критерии полупростоты Пусть любой подмодуль R-модуля W содержит в себе *неприводимый подмодуль*. Тогда следующие условия равносильны:

(1) W полупрост

(2) У каждого собственного подмодуля есть дополнительный

(3) W линейно порождается простыми подмодулями

Гомоморфизмы представлений — это линейные отображения, перестановочные с действием всех операторов из R (⟺ из A_R).

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_R(V,W)}_{} = \{ f : V \to W \mid f(gu) = g f(u) \ \forall g \in R \}$$

$\rho_1 : R \to \mathrm{End}(V)$

$\rho_2 : R \to \mathrm{End}(W)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ V \arrow[u, "\rho_1(g)"] \arrow[r, "f"] & W \arrow[u, "\rho_2(g)"'] \end{tikzcd} \quad \forall g \in R$$

R-линейные гомоморфизмы
гомоморфизмы представлений
сплетающие операторы

Пример: $W = U \oplus V$ прямая сумма R-подмодулей

$\pi : W \twoheadrightarrow U$
вдоль V $\quad u + v \mapsto u$

это R-гомоморфизм.

Факты (простые): $\forall$ R-гомоморфизма $f : U \to W$

① $\ker f$ и $\operatorname{im} f$ – это R-подмодули

② Образ и полный прообраз любого R-подмодуля тоже будут R-подмодулями.

Условие, что у любого подмодуля $U < W$ есть дополнительный $\iff$ $\forall U < W$ $\exists$ R-линейный проектор $\pi : W \to U$: $\pi^2 = \pi$, $\operatorname{im}\pi = U$.

$\pi^2 = \pi \iff \pi$ проектирует W на $\operatorname{im}\pi$ вдоль $\ker\pi$

Лемма Шура Всякий R-линейный гомоморфизм между простыми модулями либо нулевой либо является изомор-

изомор.

Док-во: $U \xrightarrow{f} V$

$\ker f < U$ $\quad \operatorname{im} f < V$

$f = 0 \Leftarrow \operatorname{im} f = 0$ $\quad \operatorname{im} f = V$

f сюръективен

$\Downarrow$

$\ker f \neq U$

$\Downarrow$

f изом. $\Leftarrow$ $\ker f = 0$

Утверждение: Если поле алгебраически замкнуто, то $\operatorname{End}_R(U) \simeq k$ для простого U. $\forall$ двух простых U, V

$$\dim \operatorname{Hom}_R(U,V) = \begin{cases} 0, & U \not\simeq V \\ 1, & U \simeq V. \end{cases}$$

Док-во: $\varphi : U \to U$ R-линейно

$\varphi - \lambda \operatorname{Id}_U$ тоже R-линейно.

k-алг. замкнуто $\Rightarrow \exists \lambda : \ker(\varphi - \lambda \operatorname{Id}) \neq 0$

$\Downarrow$ U-прост.

$\varphi - \lambda \operatorname{Id} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = \lambda \mathrm{Id}$$

зафиксируем $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$

$\forall \psi : U \xrightarrow{\sim} V \qquad \psi^{-1}\varphi = \lambda \mathrm{Id}_U$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = \lambda \psi$$

Замечание: Подмодули и фактор-модули полупростых модулей полупросты.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, two heads] & U \\ S & \pi(S) \end{tikzcd}$$

Теорема о двойном централизаторе

Дана ассоциативная подалгебра A в $\mathrm{End}(V)$. $B = \mathrm{End}_A(V) = \{ f : V \to V : fa = af \ \forall a \in A \}$

$\boxed{\dim V < \infty}$

Теорема Если V полупросто как модуль над A, то $\mathrm{End}_B(V) = A$.

Док-во: $A \subset \mathrm{End}_B(V)$

$\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ Подобрать $a \in A$: $\varphi = a$.

Выберем в V базис $e_1, \dots, e_n$ над $\mathbb{K}$.

Достаточно, чтобы $\varphi e_1 = a e_1, \dots, \varphi e_n = a e_n$

$W = V \oplus \dots \oplus V$ $f: V \to V$

$f(v_1, \dots, v_n) = (f v_1, \dots, f v_n)$

$e = (e_1, \dots, e_n)$ Надо проверить, что $\varphi e \in Ae$

V полупрост над $A \Rightarrow W$ – тоже полупрост

$\exists$ A-линейный$^?$ проектор $W \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Ae$

если $\varphi \pi = \pi \varphi$, то всё доказано

$$\varphi e = \varphi \pi e = \pi \varphi e \in Ae$$

$\exists a: \varphi e = ae.$

Надо проверить, что π и φ коммутируют.

$$\pi: V \oplus \overset{j}{\ldots} \oplus V \longrightarrow V \oplus \ldots \oplus V$$

$$\pi: \left[\begin{array}{c|c|c|c} \quad & \pi_{ij} & \quad & \quad \end{array}\right]$$

$$\begin{tikzcd} \pi_{ij}: V \arrow[r, hook, "j"'] & W \arrow[r, "\pi"] & W \arrow[d, "i"] \\ & & V \end{tikzcd}$$

$$\pi(v_1, \ldots, v_n) = (v_1, \ldots, v_n) \qquad \boxed{\pi_{ij}}$$

$$\varphi: \begin{pmatrix} \varphi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi \end{pmatrix}$$

π – A-линеен
то каждый π_{ij}
A-линеен.

каждое π_{ij} коммутирует с φ.

$$\Downarrow$$

$\begin{pmatrix} \varphi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi \end{pmatrix}$ должна коммутировать
с (π_{ij})

Следствие [Теорема Бернсайда]

Если конечномерное пр-во V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ неприводимо как модуль над множеством операторов $R < \mathrm{End}(V)$, то $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$.

$A = \mathrm{Ass}(R)$ $\quad \mathrm{End}_A(V) = \Bbbk$

по лемме Шура

$$A = \mathrm{End}_{\mathrm{End}_A(V)}(V) = \mathrm{End}_{\Bbbk}(V).$$

В частности, любое неприводимое представление ассоциативной алгебры

$$A \longrightarrow \mathrm{End}(V) \qquad !$$

над замкнутым полем сюръективно

Зам. Сюрьективное представление автоматически неприводимо над любым полем. (т.к. оно транзитивно действует на $\neq 0$ векторах)

Изотипные компоненты

U – фиксированный неприводимый R-модуль (A_R-модуль)

W – произвольный R-модуль.

W_U = сумма всех подмодулей в W, которые изоморфны U.

$\parallel$

U-изотипная компонента.

$$U \longrightarrow W$$

либо 0 либо вложен

$$c_{WU} : \operatorname{Hom}_R(U, W) \otimes U \longrightarrow W$$

$$\varphi \otimes u \longmapsto \varphi(u)$$

есть структура R-модуля

$$f(\varphi \otimes u) = \varphi \otimes fu$$

$\forall f \in R,\ \varphi \in \mathrm{Hom}_R(U,W),$
$u \in U.$

изотипная компонента $W_U = \operatorname{im} \varsigma_{WU}$

$$\underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Hom}_R(U,W)\otimes U}}{\sum \psi_i \otimes u_i} \longmapsto \sum \psi_i(u_i)$$

$\Leftarrow$ $\operatorname{im} \psi_i = \begin{cases} 0 \\ \text{либо подмодуль} \end{cases}$
изоморфный U

любой вектор из W_U может быть так записан.

Факт: любой R-линейный гомоморфизм $W_1 \xrightarrow{\psi} W_2$ переводит U-изотипную компоненту в U-изотипную компоненту

$$\sum \varphi_i(u_i) \xrightarrow{\psi} \sum \psi\varphi_i(u_i)$$

$\varphi_i \in \mathrm{Hom}_R(U,W_1)$ $\quad\psi\varphi_i \in \mathrm{Hom}_R(U,W_2)$
$u_i \in U$

В частности $\forall$ подмодуля $V < W$

$$V_U = W_U \cap V$$
