Лекция 11 ноября (вторая половина)

Ещё о строении $\Bbbk[G]$.

$\forall V$ на $\operatorname{End} V$ есть каноническая невыр. симм. форма $(a, b) = \operatorname{tr}(ab)$

$$\operatorname{End} V = V^* \otimes V \quad (\xi \otimes u, \varphi \otimes w) =$$

$$= \langle \xi, w \rangle \langle u, \varphi \rangle$$

Проверить, что симметрично и невырожд.

$$L : \Bbbk[G] \hookrightarrow \operatorname{End}(\Bbbk[G])$$

$$(f, g) = \operatorname{tr}(L_f L_g) = \underbrace{\operatorname{tr}(L_{fg})}$$

$$g : x \longrightarrow gx \qquad \operatorname{tr}(g) = \begin{cases} |G|, & g = e \\ 0, & g \neq e \end{cases}$$

$$gh = h \Rightarrow g = e$$

$$\forall g,h \in G \quad (g,h) = \begin{cases} |G| & gh = e \\ 0 & gh \neq e \end{cases}$$

Двойственным к базису из элементов группы $g \in G$ является базис

$$g^* = \frac{1}{|G|} g^{-1} \qquad (h, g^*) = \delta_{hg}$$

$$\forall f, g, h \in \mathbb{k}[G]$$

$$\begin{aligned} (fg, h) &= (f, gh) \\ &\parallel \\ &\operatorname{tr}(L_{fgh}) \end{aligned}$$

$I \subset \mathbb{k}[G]$ правый идеал $\Rightarrow I^{\perp}$ это левый идеал.

$$(I, f) = 0 \quad \forall g \ (I, gf) = (Ig, f) = (I, f)$$

I – левый идеал $\Rightarrow I^{\perp}$ правый идеал

$$(f, I) = 0 \quad \forall g \ (fg, I) = (f, gI) = (f, I) = 0$$

Ортогонал к двустороннему идеалу —
— это двусторонний? идеал.

$$I_\lambda \cdot I_\rho = 0 \Rightarrow \Bbbk[G] = \bigoplus_{\lambda \in Irr} I_\lambda$$

ортогональное
разложение.

Изоморфизм Машке:

$$\Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in irr(G)} End(V_\lambda)$$

$$tr(L_{fg}) = \sum_{\lambda \in irr} tr(\lambda(fg))$$

след левого умножения
на матрицу fg в
представлении λ.

$Mat_n(\Bbbk) \ni M$

tr умножения на $M : X \longrightarrow MX$

$Mat_n \longrightarrow Mat_n$

$$tr(L_M) = n \cdot tr M.$$

$M \cdot E_{ij} = m_{ii} E_{ij}$ + остальные

$\shortparallel$

$\sum m_{ik} E_{ik}$

Формула Планшереля:

$$(f, g) = \sum_{\lambda \in Irr(\lambda)} \dim U_\lambda \cdot tr(\lambda(fg))$$

Проектор π_λ на λ-изотипную компоненту

$$\Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \prod End(U_\lambda)$$

$$\ni_{\pi_\lambda} \quad (0..0\, Id_\lambda\, 0...)$$

π_λ зануляет все U_ρ, $\rho \neq \lambda$, на U_λ действует тождественно.

$$\pi_\lambda = rep^{-1}(0...0, Id_{U_\lambda}, 0..0) \in Z$$

$(\pi_\lambda, \pi_\rho) = 0$ $\qquad \underline{(\pi_\lambda, \pi_\lambda) = \dim^2 U_\lambda}$

$\sum \pi_\lambda = Id.$ $\qquad \pi_\lambda \in I_\lambda.$

Геометрически: $\quad 1 = \sum_{\lambda \in Irr(G)} \pi_\lambda$

ортогональное
разложение
единицы

π_λ - ортогональная проекция 1 на I_λ.

V пр-во со скал. произведением

$$v = \sum_{e \in \text{базис}} (e^*, v)\cdot e \qquad (e_i^*, * \ )$$

$$\pi_\lambda = \sum_{g\in G} (\pi_\lambda, \underbrace{g^{-1}/|G|}_{g^*})\cdot g =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot \underbrace{(\pi_\lambda, g^{-1})}_{\text{по Планшерелю}}$$

π_λ аннулирует все U_ρ

$$(\pi_\lambda, g^{-1}) = \sum_{\rho\in Irr} \dim(U_\rho)\, tr(\rho(\pi_\lambda g^{-1}))$$

$$\rho(\pi_\lambda g^{-1}) = \rho(\pi_\lambda)\rho(g^{-1}), \quad \rho(\pi_\lambda) = 0$$

при $\rho \neq \lambda$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\pi_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|}\sum_{g\in G} tr(\lambda(g^{-1}))\cdot g}$$

$\frac{1}{\dim V_\lambda} \pi_\lambda$ — ортонормальный базис центра групповой алгебры

Упр. Проверить, что в $\Bbbk[S_3]$

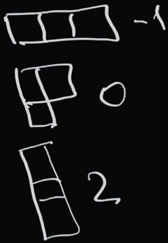
$\pi_\Delta = 1 - \frac{1}{3}(1+\tau+\tau^2)$

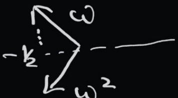
сходится

tr(g) обычно посчитать легко.

в $\Delta : S_3 \to \mathrm{End}(\Bbbk^2)$

tr_Δ:





$\pi_\Delta = \frac{1}{3}(2\cdot 1 - \tau - \tau^2)$

в S_n: $\mathrm{tr}(g^{-1}) = \mathrm{tr}(g)$ у g и g^{-1} одинаковый цикловой тип.

Характер представления $\rho : G \to GL(V)$

это функция $\chi_\rho : G \to \Bbbk$

$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$.

- характеры постоянны на классах сопряжённости $\boxed{\operatorname{tr}(ghg^{-1}) = \operatorname{tr}(h)}$

- Характеры изоморфных представлений равны.

В терминах характеров проектор на λ-изотипную компоненту имеет вид

$$\pi_\lambda = \frac{\dim V_\lambda}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_\lambda(g^{-1})\cdot g.$$

$\chi_\lambda : G \longrightarrow \Bbbk$ $\qquad$ $\chi_\lambda \in \Bbbk^G$

функции на группе.

$$\Bbbk^G \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]^*$$

Любая линейная форма $\Bbbk[G] \to \Bbbk$ однозначно задаётся действием на базис.

$\varphi : \Bbbk[G] \longrightarrow \Bbbk$

$\varphi(g) \quad \forall g \in G.$

$$f : G \longrightarrow \Bbbk \rightsquigarrow \varphi_f : \sum_{g\in G} x_g g \mapsto x_g f(g).$$

$(\,,\,)$ на $\Bbbk[G] \iff$ изоморфизм $\boxed{\Bbbk[G] \to \Bbbk[G]^*}$

$f \mapsto (f; *)$

$g \mapsto (f, g)$

$g^* = \frac{g^{-1}}{|G|}$

$$\boxed{\begin{array}{c} \Bbbk^G \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G] \\ \underline{\text{преобразование Фурье}} \end{array}}$$

базису g в $\Bbbk[G]$ двойствен базис из $\left(\frac{1}{|G|} \cdot g^{-1}, *\right)$

$$\varphi : G \to \Bbbk \longrightarrow \hat{\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \cdot g$$

$\cap$

$\Bbbk[G]$

преобр. Фурье.

Можно скалярное произведение на $\Bbbk[G]$ перетащить на $\Bbbk^G$

$$(\varphi, \psi)_{\Bbbk^G} := (\hat{\varphi}, \hat{\psi})_{\Bbbk[G]}$$

Получится скалярное произведение на функциях:

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} \varphi(g^{-1}) \psi(h^{-1}) (g, h)_{\Bbbk[G]}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \psi(g)$$

Скалярное произведение на $\Bbbk^G$?

Характеры неприводимых представлений образуют ортонормальную систему в $\Bbbk^G$ = ортонормальный ? базис в подпр-ве функций, постоянных на классах сопряжённости.

$$\boxed{\hat{\chi}_\lambda = \frac{1}{\dim U_\lambda} \pi_\lambda}$$

$V = \bigoplus U_\lambda^{m_\lambda}$ $\qquad$ $\chi_{U \oplus W} = \chi_U + \chi_W$

$m_\lambda = (\chi_V, \chi_\lambda)$

$$(\chi_V, \chi_\lambda) = \sum_{\rho \in \hat{V}} m_\rho (\chi_\rho, \chi_\lambda) = m_\lambda .$$

ρ неприводимо $\iff (\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$

$$\boxed{(\chi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) \psi(g)}$$

Характеры считать легко