Лекция 18 ноября (первая половина)

На групповой алгебре $\Bbbk[G]$ конечной группы G ($\operatorname{char}\Bbbk \nmid |G|$) есть скалярное произведение

$$(f,g) = \operatorname{tr}(L_{fg}) \quad \text{след}$$

левого регулярного действия $fg : x \to fgx$

Двойственным к базису из элементов $g \in G$ является базис $\frac{1}{|G|} g^{-1} = g^*$

$$(g,h) = \begin{cases} 0, & g \neq h^{-1} \\ |G|, & g = h^{-1} \end{cases}$$

Скалярное произведение можно вычислять по формуле Планшереля!

$$(f,g) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G)} \dim(V_\lambda) \cdot \underset{\chi_\lambda(fg)}{\underset{\parallel}{\operatorname{tr}(\lambda(fg))}}$$

"Характер представления λ."

Любой элемент $h \in \Bbbk[G]$ записывается как $\sum_{g\in G} (h, g^*)\cdot g = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} (h, g^{-1})\cdot g$

Проектор π_λ на λ-изотипную компоненту любого представления (оператор, который действует как Id на U_λ и как 0 во всех остальных неприводимых U_ρ)

$$\pi_\lambda = \frac{\dim(U_\lambda)}{|G|}\underbrace{\sum_{g\in G}\chi_\lambda(g^{-1})\cdot g}_{}$$

(π_λ, g^{-1}) посчитан по формуле Планшереля $\pi_\lambda g^{-1} = \begin{cases} g^{-1} & \text{на } U_\lambda \\ 0 & \text{на } U_\rho \end{cases}$ $\rho\neq\lambda$

π_λ составляют ортогональный базис в $Z(\mathbb{k}[G])$ и $(\pi_\lambda, \pi_\lambda) = \dim^2 U_\lambda$

$\mathbb{k}[G]$ отождествляется с $\mathbb{k}^G$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{k}[G] \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{k}[G]^* \arrow[r, "\text{ограничение на базис}"] & \mathbb{k}^G \end{tikzcd}$$

$f \mapsto (f, *)$

$G \ni g \mapsto |G|\cdot\delta_{g^{-1}}$

$|G|\delta_{g^{-1}}(h) = \begin{cases} 1, & h = g^{-1} \\ 0, & h \neq g^{-1} \end{cases}$

Обратное отображение $\Bbbk^{G} \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]$

(преобразование Фурье) $\varphi : G \to \Bbbk$

$$\varphi \rightsquigarrow \Phi$$

$$\varphi = \sum_{h \in G} \delta_1 \cdot h$$

$$\boxed{\hat{\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) g}$$

$$\hat{\delta}_h = \frac{1}{|G|} h^{-1}$$

Скалярное произведение на $\Bbbk[G]$ переносится на пр-во функций $\Bbbk^{|G|}$.

$\varphi, \psi : G \to \Bbbk$, то мы полагаем

$$(\varphi, \psi) := (\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} \varphi(g^{-1}) \psi(h^{-1}) \cdot (g, h)$$

$$(g,h) = \begin{cases} 0, & h \neq g^{-1} \\ |G|, & h = g^{-1} \end{cases}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \psi(g)}_{\text{каноническое скалярное произведение на } \Bbbk^{G}}$$

Характеры представлений

$$\rho : G \to GL(V)$$

$$\Big\downarrow$$

$$\left(\chi_\rho : G \to \Bbbk \right) \in \Bbbk^G$$

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g)).$$

[Эти функции постоянны на классах сопряжённости, и изоморфные представления имеют равные характеры]

Зам: Над полем $\Bbbk = \mathbb{C}$

$$(\chi_\lambda, \chi_\rho) = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_\lambda(g^{-1}) \chi_\rho(g)$$

$$\parallel$$

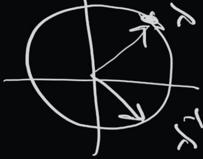
$$\frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\chi_\lambda(g)} \chi_\rho(g)$$

$\uparrow$ комплексное сопряжение

$g^{|G|} = 1$

все g диагональны, и все собственные числа любого $g \in G$ — это корни из 1.

— положительно определённая эрмитова форма на $\Bbbk^G$.



$$\overline{\mathrm{tr}(g)} = \mathrm{tr}(g^{-1})$$

сумма собственных чисел.

Зам. 2 Для представлений симметрической группы элементы g и g^{-1} в S_n имеют одинаковый цикловой тип.

$$\chi(g^{-1}) = \chi(g)$$ т.к. g и g^{-1} сопряжены

$$(\chi_\lambda, \chi_\rho) = \frac{1}{|S_n|}\sum_{g\in S_n}\chi_\lambda(g)\,\chi_\rho(g)$$

стандартная евклидова структура (тоже положит. определённая)

$$\pi_\lambda = \frac{\dim V_\lambda}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\lambda(g^{-1})\cdot g = \hat{\chi}_\lambda\cdot\dim V_\lambda$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g^{-1})\cdot g$$

$$(\pi_\lambda, \pi_\rho) = \begin{cases} 0, & \lambda\neq\rho \\ \dim^2 V_\lambda, & \lambda=\rho \end{cases} \Rightarrow$$

Неприводимые характеры составляют

$\Bbbk^{\mathrm{Cl}(G)} \subset \Bbbk^{G}$

$\uparrow$

функции, постоянные на классах сопряженности. "функции классов"

ортонормальный базис в $\Bbbk^{\mathrm{Cl}(G)}$ $\nearrow$

$$G \rightsquigarrow \underset{\wr}{\mathrm{Rep}(G)}$$

— кольцо представлений

целочисленная линейная оболочка неприводимых характеров в $\Bbbk^{G}$.

U и W $\qquad \chi_{U\oplus W} = \chi_U + \chi_W$

$$\chi_{U\otimes W} = \chi_U \cdot \chi_W$$

суммы и произведения характеров — это тоже характеры представлений

$n \in \mathbb{N}$ $\qquad n\cdot\chi_V = \chi_{\underbrace{V\oplus\dots\oplus V}_{n}}$

$\mathbb{N}$-линейная оболочка неприводимых характеров — это в точности классы изоморфных представлений группы G.

$n \in \mathbb{N}$, $\quad -n\cdot\chi_V$ на виртуальных представлениях

$$(\chi_V, \chi_W) = \dim \underbrace{\mathrm{Hom}_G(V, W)}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G)} n_\lambda \cdot U_\lambda \qquad W = \bigoplus_{\rho \in \mathrm{Irr}(G)} m_\rho W_\rho$$

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G)} n_\lambda \cdot m_\lambda$$

$$\Big(\overset{\chi_V}{\overset{\|}{\sum_{\lambda \in \mathrm{Irr}} n_\lambda \chi_\lambda}} , \overset{\chi_W}{\overset{\|}{\sum_{\rho \in \mathrm{Irr}} m_\rho W_\rho}} \Big)$$

$\|$ в силу ортонормальности характеров

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Irr}} n_\lambda m_\lambda \qquad V = \sum \overset{\in \mathbb{N}}{n_\lambda} U_\lambda$$

Представление V неприводимо $\Longleftrightarrow$

$$(\chi_V, \chi_V) = 1$$

$$\sum^{k} n_\lambda^2$$

Кратность вхождения неприводимого U_λ в данное V равна (χ_V, χ_λ)

Индуцирование и коиндуцирование.

$A < B$ две $\Bbbk$-алгебры (не обязательно коммутативные) ассоциативные и с общей единицей

$H < G \qquad \Bbbk[H] < \Bbbk[G]$

Всякий B-модуль можно воспринимать как A-модуль

$$B\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, mapsto, "\text{ограничение}"] & \operatorname{res} W \end{tikzcd}$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ векторное пр-во W над $\mathbb{C}$

$$\rightsquigarrow$$

$\operatorname{res} W = W_{\mathbb{R}}$ овеществление

Имеется сопоставление в другую сторону

$$\begin{tikzcd} B\text{-mod} & A\text{-mod} \arrow[l, "\text{ind}", "\text{индуцирование}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} B \underset{A}{\otimes} V & V \arrow[l] \end{tikzcd}$$

тензорное произведение векторных пространств $B \otimes V$ (над полем $\mathbb{k}$) профакторизованное по соотношениям

$$ba \underset{A}{\otimes} v = b \underset{A}{\otimes} av \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

$B\otimes V / J$ $\qquad \forall v \in V.$

J - линейная оболочка всех разностей $ba\otimes v - b\otimes av$

Алгебра B действует на $\underline{B\underset{A}{\otimes} V}$ умножением слева

$$b:\ b'\underset{A}{\otimes} V \longrightarrow bb'\underset{A}{\otimes} V$$

Факт Имеет место канонический изоморфизм $\forall$ A-mod. V, $\forall$ B-mod W

$$\mathrm{Hom}_B(B\underset{A}{\otimes} V, W) \simeq \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{res}\, W)$$

B-линейное $\varphi: B\underset{A}{\otimes} V \longrightarrow W$

$$\Updownarrow$$

A-линейное $\psi: V \longrightarrow W$

$$v \longmapsto \varphi(1\underset{A}{\otimes} v)$$

A-линейность: $av \longmapsto \varphi(1\underset{A}{\otimes} av) =$

$\boxed{\psi(av) = a\psi(v)}$: $= \varphi(a\underset{A}{\otimes} v) =$

$= a\varphi(1\underset{A}{\otimes} v)$

Сопоставление $\varphi \longmapsto \psi$ линейно по φ

Обратное сопоставление:

$$\begin{tikzcd} A\text{-линейное } \psi : V \arrow[r] \arrow[d, squiggly] & W \\ \varphi : \underbrace{B \otimes_A V \longrightarrow W}_{B\text{-линейно}} & \end{tikzcd}$$

$$\varphi(b \otimes_A v) = \underbrace{b\psi(v)}_{\substack{\text{линейно по} \\ b \text{ и по } v}}$$

Упражнение: Проверить, что эти сопоставления обратны друг другу.
