Лекция 25 ноября (первая половина)

G - группа $H < G$ - подгруппа

$\rho: H \longrightarrow \underline{\underline{GL(V)}}$ $\operatorname{ind}_H^G V = \mathbb{k}[G] \otimes_{\mathbb{k}[H]} V$

$fh \otimes u = f \otimes hu$

$g_i V = V$ $\bigoplus_{i=1}^{m} g_i V$

$$\boxed{G = g_1 H \cup g_2 H \cup \dots \cup g_m H}$$

$g_1, \dots, g_m$ - это все представители смежных классов gH

$g_i u$ это вектор $u \in V$, живущий в g_i-той копии

$\forall g \; \forall i \; \exists!\, j, h:$

$g \in G$ $g g_i = g_j h$

$$g \cdot \underset{\overset{\cap}{g_i V}}{(g_i u)} \in g_j V \qquad g: g_i V \longrightarrow g_j V$$

$$g(g_i u) = g_j h u$$

Характер индуцированного представления:

$g \in C$, C - это класс сопряженности в группе G.

$\chi_{\mathrm{ind}\, v}(C) = ?$

Пусть $H \cap C = D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_m$

дизъюнктные классы H-сопряжённости.

Ответ: $\chi_{\mathrm{ind}(v)}(C) = [G:H] \sum_{i=1}^{m} \frac{|D_i|}{|C|} \chi_v(D_i)$

Док-во: $\in C$

$$\chi_{\mathrm{ind}(v)}(g) = \sum_{\substack{i:\\ gg_i \in g_i H}} \mathrm{tr}_v(h) = \sum_{\substack{i:\\ g_i^{-1} g g_i \in H}} \chi_v(g_i^{-1} g g_i)$$

$gg_i \in g_i H$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{gg_i = g_i h}}$ $\quad h = g_i^{-1} g g_i$

$\underline{g_i^{-1} g g_i \in H}$ $\quad \forall h \in H$

$(g_i h)^{-1} g (g_i h) \in H.$

Заменим $g_i^{-1} g g_i$ на $|H|$ слагаемых

вида $(g_i h)^{-1} g (g_i h)$

$$= \sum_{\substack{s \in G: \\ s^{-1}gs \in H}} \chi_U(s^{-1}gs) \cdot \frac{1}{|H|} =$$

$s \in G = g_1H \cup g_2H \cup \dots$

$s = g_iH$ и $g_i^{-1}gg_i \in H$

то тогда $s^{-1}gs \in H$

а если $g_i^{-1}gg_i \notin H$

то и $s^{-1}gs \notin H$.

каждый элемент из $C \cap H$ представляется в виде $s^{-1}gs$ столькими способами, сколько элементов в C_g

$$|C_g| = \frac{|G|}{|C|}$$

$$C \cap H = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_m$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \chi_U(D_i) \frac{|D_i|}{|H|} \frac{|G|}{|C|} =$$

$\chi_U(s^{-1}gs) = \chi(D_i)$ если $s^{-1}gs \in D_i$

$$= [G:H] \sum \chi_U(D_i) \frac{|D_i|}{|C|}$$

Универсальное свойство индуцирования

$$\operatorname{Hom}_G(\underbrace{\Bbbk[G]\otimes_{\Bbbk[H]} U}, W) \cong \operatorname{Hom}_H(U, \overset{\operatorname{res} W}{\overset{\shortparallel}{W}})$$

$\forall$ H-модуля U и $\forall$ G-модуля W

для $W = \Bbbk[G]\otimes U$

$$\operatorname{End}_G(\operatorname{ind} U) \cong \operatorname{Hom}_H(U, \operatorname{ind} U)$$

$$\operatorname{Id} U \rightsquigarrow \tau : U \to \operatorname{ind} U$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Bbbk[G]\otimes_{\Bbbk[H]} U \arrow[dl, dashed, "\tilde\varphi"] \\ W & \end{tikzcd}$$

$\tau : U \to \Bbbk[G]\otimes_{\Bbbk[H]} U$

$\underline{\underline{u \longmapsto 1\otimes u}}$

H-линейно φ

$\tilde\varphi(g\otimes u) = g\varphi(u)$

G-линейный? $\tilde\varphi$

$\forall$ G-модуля W

$\forall$ H-линейного $\varphi : U \to W$ $\exists!$ G-линейный

$\tilde{\varphi} : \operatorname{ind} U \to W : \quad \tilde{\varphi} \circ \tau = \varphi$

Отображение $\tau : U \to \mathbb{k}[G] \otimes U$

$\boxed{\text{единственно с точностью до единственного изоморфизма}}$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau_1"'] & \operatorname{ind} U \arrow[d, shift right] \\
 & \tilde{U} \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

Канонически тождественны

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{U} \\
U \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \tilde{U} \arrow[uu, "\text{кан}", "\| \mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau"'] & \operatorname{ind} U \arrow[d, bend right, "\text{кан}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
 & \operatorname{ind} U
\end{tikzcd}$$

Следствие: $K < H < G$

$$\operatorname{ind}_K^G = \operatorname{ind}_H^G \circ \operatorname{ind}_K^H$$

$\forall$ K-модуль U и G-модуль W

$$\operatorname{Hom}_K(U, W) = \operatorname{Hom}_H(\operatorname{ind}_K^H U, W) =$$

$$= \operatorname{Hom}_G(\operatorname{ind}_H^G \operatorname{ind}_K^H U, W)$$

Коиндуцирование

$A < B$ расширение $\mathbb{K}$-алгебр

U — модуль над A

$B \otimes_A U$ — индуцированный B-модуль

$\boxed{\mathrm{Hom}_A(B,U)}$ — левый B-модуль относительно действия B правыми умножениями и аргумент

$\varphi : B \longrightarrow U$

$b\varphi : b' \longmapsto \varphi(b'b)$

$b_1 b_2 \varphi : b' \longmapsto \varphi(b' b_1 b_2)$

$b_2 \varphi : b' \longmapsto \varphi(b' b_2)$

$b_1[b_2\varphi] : b' \longmapsto b_2\varphi(b' b_1) = \varphi(b' b_1 b_2)$

$\boxed{\mathrm{Hom}_A(B,U) \text{ наз. коиндуцированным модулем}}$

$$U \xrightarrow{\tau} B \otimes_A U$$

$$u \longmapsto 1 \otimes u$$

$$\operatorname{Hom}_A(B,U) \xrightarrow{\hat\tau} U$$

$$\varphi \longmapsto \varphi(1)$$

симметричное универсальное свойство:

$\forall$ B-модуля W и любой A-линейной стрелки $W \xrightarrow{\varphi} U$ $\exists!$ B-линейная стрелка $\tilde\varphi : W \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(B,U)$: диаграмм

$$\psi : B \to U \longmapsto \psi(1)$$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_A(B,U) \arrow[rr, "\hat\tau"] & & U \\
& W \arrow[ul, dashed, "\exists!\, \tilde\varphi", "B\text{-линейн}"'] \arrow[ur, "\varphi", "A\text{-линейн}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\tilde\varphi : w \longmapsto \left(\psi_w : B \to U\right) \qquad \varphi = \hat\tau \circ \tilde\varphi$$

$$\psi_w(1) = \varphi(w)$$

Положим $\underbrace{\psi_w(b) = \varphi(bw)}$

ψ_w B-линеен по W

$$\psi_{w_1 + w_2} = \psi_{w_1} + \psi_{w_2}$$

$\boxed{!}$

$$\psi_{bw} : b' \longmapsto \varphi(b'bw) = b\psi_w(b')$$

$$\psi_w : b' \to \varphi(b'w)$$

$$b\psi_w : b' \to \psi_w(b'b)$$

Имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_A(W, U) = \mathrm{Hom}_B(W, \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Coind}_A^B U}}{\mathrm{Hom}_A(B, U)})$$

Для конечных групп имеется канонический изоморфизм $\mathrm{ind}_H^G U \xrightarrow{\sim} \mathrm{coind}_H^G U$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_k(k[G], U) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[dr, "F \mapsto \hat{F}"] & k[G]^* \otimes U \arrow[d, "\text{скалярное произв. на группе}"] \\
& \underbrace{k[G] \otimes U}
\end{tikzcd}$$

$$\varphi : k[G] \longrightarrow k$$

$$\wr$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \cdot g \in k[G]$$

$F = \xi \otimes u \qquad \xi \in \mathbb{k}[G]^*, u \in U$

$$\hat{F} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underline{\underline{\xi(g^{-1}) \cdot g}} \otimes \underline{\underline{u}} =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \otimes \left[[\xi \otimes u](g^{-1}) \right]$$

$$\boxed{\hat{F} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \otimes F(g^{-1})}$$

$$F \longmapsto \hat{F}$$

$$\mathrm{Hom}_k(\underline{\underline{\mathbb{k}[G]}}, U) \simeq \underline{\underline{\mathbb{k}[G]}} \otimes U$$

Этот изоморфизм G - линеен.

Упр.

Упр: Проверить, что подмн-во H - инвариантов

$$\mathrm{Hom}_H(\mathbb{k}[G], U)$$

корректно и изоморфно отображается

на фактор $\mathbb{k}[G] \otimes_{\mathbb{k}[H]} U$

Объявление: про экзамен

В воскресенье 19 Декабря с 10^{00} до 14^{00} заочно.

В 10^{00} я выложу на сайт курса задачи

До 14^{00} должны прислать решение по электронной почте