Лекция 2 декабря (первая половина)

Представления симм. группы S_n

классы сопряжённости в S_n $\xleftrightarrow{1:1}$ диаграммы Юнга λ с $|\lambda| = n$ клеток.

Заполнение формы λ — это заполнение клеток λ числами от 1 до n, так что каждое число встречается 1 раз (стандартное заполнение).

S_n действует на заполнениях: $T \to gT$

Каждое заполнение T выделяет в S_n две подгруппы:

строчная подгруппа R_T (row) сохраняет содержимое каждой строки T

столбцовая подгруппа C_T (column) сохраняет содержимое каждого столбца T

$\lambda(T) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$R_T = S_{\lambda_1}\times S_{\lambda_2}\times\ldots\times S_{\lambda_n}$$

$\lambda^T = (\lambda_1^T, \ldots, \lambda_n^T)$ ← длины столбцов в λ

$$C_T = S_{\lambda_1^T}\times\ldots\times S_{\lambda_n^T}$$

$R_T \cap C_T = \{e\}$ $R_T C_T \xleftrightarrow{1:1} R_T \times C_T$

Запись элемента в виде pq с $p \in R_T$ $q \in C_T$ единственна.

Комбинаторное замечание!

Пусть два заполнения T и U имеют формы $\lambda = \lambda(T)$ и $\mu = \mu(U)$ и при этом $|\lambda| = |\mu| = n$ и $\mu \ntrianglerighteq \lambda$ (μ не является строго доминирующей λ)

$\mu \trianglerighteq \lambda \iff \mu_1 + \ldots + \mu_k \geq \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$

Доминирование

Тогда имеет место альтернатива:

- либо есть 2 элемента, стоящие в одной строке T и в одном столбце U
- либо $\lambda = \mu$ и $pT = qU$ для некоторых

$p \in R_T$ и $q \in C_U$

Док-во: Пусть любые два элемента из одной строки T лежат в разных столбцах U.

$\mu_1 \geq \lambda_1$ $\quad T$:

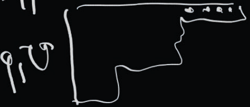
$\exists\, q_1 \in C_U$: в q_1U все элементы первой строки T лежат в первой строке U.

- смотрим на вторую строку T

$\exists\, q_2 \in C_{q_1U} = C_U$: все элементы второй строки T попадают либо в первую либо во вторую строку q_2q_1U

$\Downarrow$

$\mu_1 + \mu_2 \geq \lambda_1 + \lambda_2$



на k-том шагу мы имеем перестановку

$q_k \in C_{q_{k-1}\dots q_1U} = C_U$:

она переставляет все элементы k-той строки T в верхние k строк заполнения $q_kq_{k-1}\dots q_1U$.

$\forall k \quad \mu_1 + \dots + \mu_k \geq \lambda_1 + \dots + \lambda_k$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\lambda = \mu}$ $\quad \exists p \in R_T : pT = q_n \cdots q_1 U, \quad q_i \in C_U$

имеет место 2й случай.

Следствие $g \in R_T C_T \iff$ никакие два элемента из одной строки T не лежат в одном столбце gT.

Док-во: $g = pq : p \in R_T, q \in C_T$

элементы из одной строки T лежат в разных столбцах qT.

Перестановка $p : qT \to pqT$ переставляет эти эл-ты между собой

$\Downarrow$

они останутся лежать в разных столбцах в заполнении pqT.

Наоборот, пусть никакие 2 эл-та из одной строки T не лежат в одном столбце gT.

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$?

действует 2й случай, и $\exists p \in R_T$ и $q \in C_{gT}$:

$pT = qgT \qquad p = q\cdot g \leftarrow \left| \begin{array}{l} q = gq_1g^{-1} \\ q_1 \in C_T \end{array} \right.$

$p = gq_1g^{-1}g$

$p = gq_1 \Rightarrow g = pq_1^{-1} \in R_TC_T$

$$\boxed{\begin{array}{l} C_{gT} = gC_Tg^{-1} \\ R_{gT} = gR_Tg^{-1} \end{array}}$$

Устройство $\mathbb{C}[S_n]$

Симметризаторы Юнга заполнение T.

строчный симметризатор $r_T = \sum\limits_{g\in R_T} g$

столбцовый симметризатор $c_T = \sum\limits_{g\in C_T} \mathrm{sgn}(g)\cdot g$

полный симметризатор: $s_T = r_Tc_T =$

$$= \sum_{\substack{p\in R_T \\ q\in C_T}} \mathrm{sgn}(q)\cdot pq \qquad R_T \cap C_T = \{e\}$$

стоят различные элементы из S_n со знаком ±1, $e = e\cdot e$ стоит с $+$.

Очевидные равенства: $s_{gT} = g s_T g^{-1}$

$p r_T = r_T = r_T p \quad \forall p \in R_T$ | $r_{gT} = g r_T g^{-1}$

$q c_T = \mathrm{sgn}(q)\cdot c_T = c_T \cdot q \quad \forall q \in C_T$ | $c_{gT} = g c_T g^{-1}$

$$\boxed{p s_T q = \mathrm{sgn}(q) s_T \quad \forall p \in R_T, \forall q \in C_T.}$$

Факт. $\{ f \in \mathbb{C}[S_n] \mid \forall p \in R_T\ \forall q \in C_T\ \ \underline{pfq = \mathrm{sgn}(q)\cdot f} \}$

/S 1-мерное пр-во

$\mathbb{C}\cdot s_T$

Док-во: $f = \sum_{g \in S_n} x_g \cdot g$ $\quad pfq = \mathrm{sgn}(q)\cdot f$

$\Updownarrow$

$x_{pgq} = x_g \cdot \mathrm{sgn}(q) \quad \forall g \in S_n \ \forall p, q.$

при $g = e$ $\quad x_{pq} = x_e$

$$f = \underbrace{\sum_{\substack{p \in R_T \\ q \in C_T}} x_e \cdot p \cdot q \cdot \mathrm{sgn}(q)}_{x_e \cdot s_T} + \cancelto{0}{\sum_{g \notin R_T C_T} x_g g}.$$

$g \notin R_T C_T \Rightarrow \exists$ пара элементов из одной строки T и одного столбца gT.

Пусть τ — это их транспозиция.

$$\tau \in R_T \cap C_{gT} \qquad g^{-1}\tau g \in C_T$$

$$\uparrow$$

$$g C_T g^{-1}$$

$$x_g \cdot \mathrm{sgn}(q) = x_{pgq} \qquad \forall p,q$$

$p = \tau \quad q = g^{-1}\tau g$ — транспозиция

$$x_g \cdot (-1) = x_{\tau g g^{-1} \tau g} = x_g$$

$$x_g = -x_g \Rightarrow x_g = 0$$

Следствие: $s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T = \mathbb{C} \cdot s_T$

Более того $s_T \cdot s_T = s_T \cdot n_T$, где $n_T \in \mathbb{Q}_{>0}$ и зависит только от формы $\lambda(T)$.

$$s_T f s_T = p\, s_T f s_T\, q \cdot \mathrm{sgn}(q)$$

$$\cap \qquad\qquad r_T c_T \quad r_T c_T$$

$\mathbb{C}\cdot s_T$.

$s_T\cdot s_T = s_T\cdot n_T$ как сосчитать?

Рассмотрим правое умножение на s_T:

$$\mathbb{C}[S_n]\longrightarrow\mathbb{C}[S_n],\ x\to x\cdot s_T$$

это гомоморфизм левого регулярного представления. Вычислим след $tr(s_T)$.

$$g\longmapsto g\cdot\sum_{\substack{p\in R_T\\ q\in C_T}} pq\,sgn(q) = g+\dots$$

$\Downarrow$

$$tr(s_T)=|S_n|=n!$$

С другой стороны:

$$s_T:\ \mathbb{C}[S_n]\longrightarrow\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$$

$$\mathbb{C}[S_n]=W\oplus\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T.$$

$$s_T|_W:\ W\longrightarrow\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$$

не даёт вклад в tr

$$s_T|_{\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T}=n_T\cdot Id_{\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T}$$

$$s_T\cdot s_T=n_T\cdot s_T$$

$$\underline{tr(s_T)=n_T\cdot\dim\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T}$$

$$h_T = \frac{n!}{\dim \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T} \in \mathbb{Q}_{>0}.$$

$$s_{gT}^2 = g s_T^2 g^{-1} = g\, h_T\, s_T\, g^{-1} = \underline{\underline{h_T}} \cdot s_{gT}$$

$$\|$$

$$g s_T g^{-1}$$

тот же коэфф-т!

зависит только от формы.