Лекция 9 декабря (вторая половина)

Следствие: Модуль Шпехта S_λ неприводим и изоморфен представлению $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]\cdot s_\lambda$. Причём

$$M_\lambda = \bigoplus_{\mu \trianglerighteq \lambda} S_\mu^{m_{\lambda\mu}} \; : m_{\lambda\lambda} = 1.$$

S_λ (или V_λ) входит в M_λ с кратностью 1, а все остальные S_μ входящие в M_λ имеют $\mu \triangleright \lambda$.

Док-во: $\boxed{\text{неприводимость } S_\lambda}$:

Пусть $S_\lambda = U \oplus W$ $\quad U, W$ - S_n-подм.

$c_T(U) \subset U \quad c_T(W) \subset W$

$c_T S_\lambda \subset c_T \cdot M_\lambda = \mathbb{C} \cdot v_T$

Пусть $v_T \in U \Rightarrow S_\lambda = S_n v_T \subset U$

($S_\lambda = \mathrm{span}(v_T \mid$ по всем заполнениям T формы λ))

$$\boxed{S_\lambda \not\cong S_\mu \text{ при } \mu \neq \lambda.}$$

Пусть $\lambda < \mu$ лексикографически.

Тогда $\lambda \not\trianglerighteq \mu \Rightarrow$ по лемме $\Rightarrow$

$$c_T S_\mu = 0$$

в то же время $c_T \cdot \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ v_T}}{S_\lambda} \neq 0.$

$$\underset{=}{c_T \cdot v_T} = c_T\, c_T\{T\} \overset{?}{=} |C_T|\, c_T\{T\}$$

$$\| \qquad |C_T| \cdot v_T \quad \text{свойство } c_T$$

$$c_T = \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) \cdot q.$$

$$c_T c_T = \sum_{q_1} \sum_{q_2} \underbrace{\operatorname{sgn}(q_1 q_2) q_1 q_2}$$

при каждом фиксир. q_1 $\sum\limits_{q_2} = c_T$

$$\boxed{c_T c_T = |C_T| \cdot c_T}$$

v_T – собственный элем c_T с собств. значением $|C_T|$.

Модули S_λ составляют полный список неприводимых представлений? S_n

$$\forall\lambda\ \exists!\ \mu : \boxed{S_\lambda} \not\cong V_\mu = \mathbb{C}[S_\lambda]\cdot s_\mu.$$

(в прошлый раз мы проверили, что

$$c_T\,\mathbb{C}[S_n]\cdot s_\mu = 0$$

при $\mu < \lambda$ лексикогр.

$S_\lambda \not\cong V_\mu$ с $\mu < \lambda$.

$\Downarrow$

$S_\lambda \cong V_\lambda$

Кратность S_λ в M_λ:

$$M_\lambda = \bigoplus_{\mu \trianglerighteq \lambda} S_\mu^{\oplus m_{\lambda\mu}}$$

T - заполнение формы λ.

$$c_T S_\lambda \underset{=}{\subset} S_\lambda = \mathrm{Span}(v_T) \subset M_\lambda.$$

c_T переводит каждое V_λ в себя

тем самым кратность вхождения V_λ

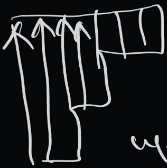
в Мхравия 1.

$S_\lambda = \mathrm{Span}\,(v_T \mid T$ пробегает заполнения формы $\lambda)$.

v_T : T – таблица (т.е. числа строго возрастают вдоль строк и столбцов) образуют базис в S_λ.

$\dim S_\lambda = d_\lambda$ – число стандартных таблиц формы λ.

Введём на всех заполнениях формы λ линейный порядок



заполнению T сопоставим слово $CD(T)$ полученное прочтением T по столбцам: каждый столбец читается снизу вверх, а сами столбцы перебираются слева направо

$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$ $\quad CD(T) = 13542$

Скажем, что $U \succ T$, если самое большое из чисел, стоящих в U и в T в различных клетках стоит в $CD(U)$ левее, чем в $CD(T)$

Упр: проверить, что это линейный порядок

$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array} \longleftarrow 5\,4\,3\,\underleftrightarrow{2\;1}$

$\vee$

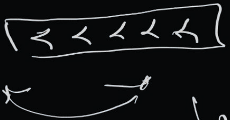
$\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 \end{array} \qquad 54312$

$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{array} \qquad 54231$

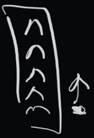
В чём смысл: $\forall$ таблицы T (где числа возрастают слева направо сверху вниз) $\forall\, p \in R_T,\ q \in C_q$ выполняются неравенства

$$pT > T > qT$$

Максимальный элемент любого цикла перестановки p сдвигается строго влево



Максимальный элемент любого цикла в q сдвигается строго вверх.



Док-во теоремы о базисе:

Надо проверить, что векторы v_T, где T пробегает таблицы линейно независимы.

Тогда $\dim S_\lambda \underline{\underline{\geq}} d_\lambda$ - число таблиц формы λ.

$$|S_n| = n! = \sum_\lambda \dim^2 S_\lambda$$

$$n! = \sum_\lambda d_\lambda^2 \leftarrow \text{из теоремы о биекции}$$

$$\Downarrow$$

$$\dim S_\lambda = d_\lambda$$

$$\Downarrow$$

v_T составляют базис.

Проверка линейной независимости векторов v_T.

$$pT > \boxed{T > qT}$$

для таблицы T

если T - таблица, то он является минимальным элементом таблоида

$$\{T\} = R_T T \Rightarrow \{U\} \neq \{T\}$$

если $U < T$ и T таблица

$$v_T = c_T\{T\} = \{T\} + \sum{}' \{U\} \cdot \varepsilon_U$$

$U < T$

$\varepsilon_U = \left[\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\right.$

Всякая линейная зависимость между векторами v_T имеет вид:

$$v_T = \sum_{U<T} v_U \cdot x_U \in \mathbb{C}$$

вектор с самым большим T

разложим v_T и все v_U по базису в M_λ

$$\underline{\{v_T\}} + \text{что-то меньшее} =$$

$$= \sum_{U<T}$$

Это невозможно

$\dim S_\lambda = d_\lambda$
