Лекция 16 декабря (вторая половина)

$$\underline{\underline{ch(V)}} = \sum_\mu z_\mu^{-1} \underleftarrow{\chi_V(C_\mu)} p_\mu$$

аддитивно по V $\quad \chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$

мультипликативно, поскольку переводит

$$M_\lambda \longrightarrow h_\lambda = h_{\lambda_1} \dots h_{\lambda_k}$$

$$M_{(\lambda_1)} M_{(\lambda_2)} \dots M_{(\lambda_k)}$$

$$\| $$

$$\mathbb{1}_{\lambda_1} \mathbb{1}_{\lambda_2} \dots \mathbb{1}_{\lambda_k} \longrightarrow$$

стандартный базисный моном в $\underline{\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, h_3 \dots}$

стандартный базисный моном в $\underline{Rep = \mathbb{Z}[\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2 \dots]}$

мономы $\longrightarrow$ мономы с сохранением произведения.

Изометричность!

$$(\chi_V, \chi_W)_{Rep} = \sum_\mu z^{-1} \underline{\chi_V(C_\mu)\, \chi_W(C_\mu)}$$

$$(ch(V), ch\, W)_\Lambda = \sum_{\mu,\lambda} z_\mu^{-1} z_\lambda^{-1} \chi_V(C_\mu) \chi_W(C_\lambda) \times$$

$$\times (p_\mu, p_\lambda)_\Lambda$$

$$= \sum_{\mu} z_\mu^{-1} \chi_0(C_\mu)\chi_w(C_\mu) \qquad \overset{\parallel}{\delta_{\mu,\lambda} z_\lambda}$$

$$\boxed{M_\lambda = S_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} S_\mu^{m_\lambda}} \qquad \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \circledast & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} K_{\mu,\lambda}}$$

$$[S_\lambda] = [M_\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_\mu [M_\mu]$$

$$\underline{\underline{ch([S_\lambda])}} = ch[M_\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} ch[M_\mu]\cdot x_\mu$$

$$= h_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} h_\mu \cdot x_\mu =$$

$$\Rightarrow \quad = \underline{s}_\lambda + \underbrace{\sum_{\mu \rhd \lambda} s_\mu \cdot y_\mu}$$

$$\left(ch(S_\lambda), ch(S_\lambda)\right)_\Lambda = 1$$

$(s_\lambda, s_\lambda) = 1$ $\Downarrow$ все у м-го

$\mathrm{ch}(S^\lambda) = s_\lambda$ полином Шура.

Следствие1: произведение Литтлвуда-Ричардсона соответствует произведению симм. функций (мультипликативность ch)

$$s_\lambda \cdot s_\mu = \sum c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu$$

к-ты Литтлвуда-Ричардсона.

Следствие 2: $h_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} s_\mu$

$\Leftarrow$

$$M_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} \cdot S^\mu$$

↑ # таблиц формы μ и содержания λ.

Следствие 1 $\Rightarrow$ $S_{n+1} \supset \underline{\underline{S_n}} = \mathrm{Stab}(n)$

$$\begin{tikzcd} S_n : U \qquad \mathrm{ind}_{S_n}^{S_{n+1}} U = {[U]\cdot \mathbb{1}_1.} \arrow[d, "ch"] \\ \boxed{\underline{\underline{s_\lambda}} \cdot h_1} \arrow[d, phantom, "\|"] \\ \sum\limits_\mu s_\mu \end{tikzcd}$$

для $U = S_\lambda$.

диаграммы, получающиеся добавлением одной клетки к диаграмме λ. $\longrightarrow \sum\limits_\mu s_\mu$

Формула ветвления: $\mathrm{ind}_{S_n}^{S_{n+1}} S_\lambda =$

$$= \bigoplus_\mu S_\mu \qquad \mu = \lambda + \square$$

$$\mathrm{res}^{S_n}_{S_{n-1}} S_\lambda = \bigoplus S_\mu \quad \mu = \lambda \setminus \square$$

(по двойств. Фробениуса).

Формула Фробениуса для

характеров

Значение характера χ_λ неприводимого представления S_λ группы S_n на классе C_μ равно любому из следующих чисел:

(1) коэфф-т при $\underbrace{z_\mu^{-1} p_\mu(x)}$ в разложении полинома Шура $S_\lambda(x)$ по базису $z_\mu^{-1} p_\mu$ в $\Lambda\otimes\mathbb{Q}$.

(p_μ, S_λ)

(2) коэфф-ту при S_λ в разложении $p_\mu(x)$ по базису $S_\lambda(x)$ в Λ.

(3) [переформулировка 1]

$$\left[S_\lambda(x) = \frac{\Delta_{\lambda+\delta}(x)}{\Delta} \qquad p_\mu\cdot\Delta = \sum_\lambda \underline{\Delta_{\lambda+\delta}} \right]$$

коэфф-ту при $\underline{x_1}^{\lambda_1+n-1}\ \underbrace{x_2^{\lambda_2+n-2}\cdots x_n^{\lambda_n}}_{\underset{\lambda+\delta}{\parallel}}$

в многочлене $p_1(x)^{m_1} \overset{x}{p_2(x)^{m_2}} \dots p_n(x)^{m_n} \cdot \Delta$

$$\parallel$$

$$p_\lambda(x) \cdot \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

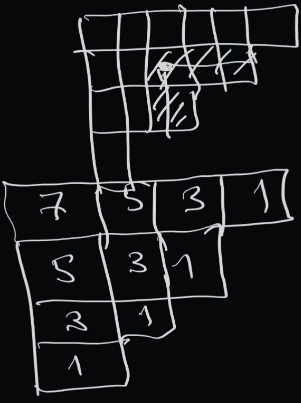
Упр. Применить формулу Фробениуса для характеров и доказать, что

$$\dim S_\lambda = \frac{n!}{\eta_1! \dots \eta_n!} \prod_{i<j} (\eta_i - \eta_j)$$

где $\eta = \lambda + \delta$

$$\boxed{\dim S_\lambda = \chi_\lambda(1)}$$

$$\frac{n!}{\prod \underline{\text{длин крюков}}}$$



$$S_{4321} = \frac{10!}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7}$$

Потому p_λ ортогональны с

$(p_\lambda, p_\lambda) = z_\lambda$.

Тождество Коши:

$$\boxed{\prod_{ij} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum s_\lambda(x) s_\lambda(y)}$$

(факт из исчисления массивов).

слева

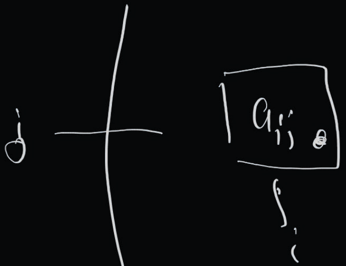
$$\prod_{ij} \left(1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + (x_i y_j)^3 + \dots\right)$$

в ij-той скобке выбираем a_{ij}-тое

слагаемое

$$\overset{\|}{\sum_a} \underline{\underline{x}}^{a^t} \underline{\underline{y}}^{a}$$

произведение шариков массива a, в котором каждый шарик из клетки i,j интерпретируется как $x_i y$.



● = $x_i y_j$

j $\boxed{x_i}$

x^a = произв. всех букв

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)\,s_\lambda(y)$$

$$\sum s_\lambda(x)\,s_\lambda(y) = \prod \frac{1}{1-x_iy_j} =$$

$$= \prod_j H(y_j) = \qquad H(t) = \prod_i \frac{1}{1-x_it}$$

$$= \prod_j e^{\int_0^{y_j} P(t)} = \qquad \frac{\partial}{\partial t}\ln H = P(t) = \sum_{k\geq 1} p_k t^{k-1}$$

$$= e^{\sum_j \sum_{k\geq 0} \frac{p_k y_j^k}{k}} =$$

$$= e^{\sum_k \frac{p_k(x)\,p_k(y)}{k}} = \prod_k e^{\frac{p_k(x)\,p_k(y)}{k}} =$$

$$= \prod_k \sum_{l\geq 0} \frac{1}{l!\,k^l}\, p_k^l(x)\, p_k^l(y) =$$

$$= \sum_\lambda z_\lambda\, p_\lambda(x)\, p_\lambda(y)$$

$$\parallel$$

$$\sum s_\lambda(x)\,s_\lambda(y)$$

$(p_\lambda, p_\mu) \underset{\Lambda}{=} z_\lambda \cdot \delta_{\mu\lambda}$

Экзамен в воскресенье
19.12.2021
с 10^{00} до 14^{00}

задачи будут на странице курса (на good.bogomolov-lab.ru)