

## §4. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм

**4.1. Массивы и элементарные операции над ними.** Зафиксируем два конечных упорядоченных множества  $I = \{1, \dots, n\}$  и  $J = \{1, \dots, m\}$  из  $n$  и  $m$  элементов и будем рассматривать прямоугольные таблицы из  $n$  столбцов и  $m$  строк, занумерованных элементами  $I$  и  $J$  соответственно. Таковую таблицу  $a$  мы будем называть *массивом* и размещать в *первом* квадранте декартовой системы координат так, чтобы элементы из  $I$  росли слева направо по горизонтальной оси, а элементы из  $J$  росли снизу вверх по вертикальной оси. Содержимое  $a(i, j)$  клетки с координатами  $(i, j)$  у нас всегда будет целым неотрицательным числом, которое стоит воспринимать как «количество» или «массу». Весь массив удобно представлять себе как набор шариков одинаковой массы, наделённых двумя группами признаков и в соответствии с этим разложенных по ячейкам массива. Мы никогда не будем проделывать с величинами  $a(i, j)$  вычисления, но будем перекладывать шарики из ячейки в ячейку, меняя тем самым их принадлежность к тому или иному признаку каждой из двух групп и соответственно меняя значения  $a(i, j)$ .

С массивом  $a$  связан *столбцовый вес* (или  *$I$ -вес*)

$$w^I = \left( \sum_j a(1, j), \sum_j a(2, j), \dots, \sum_j a(n, j) \right) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n. \quad (4-1)$$

Это  $n$ -мерный целочисленный вектор,  $i$ -тая координата которого равна общему количеству шариков в  $i$ -том столбце. Аналогично определяется *строчный вес* (или  *$J$ -вес*)

$$w^J = \left( \sum_i a(i, 1), \sum_i a(i, 2), \dots, \sum_i a(i, m) \right) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m. \quad (4-2)$$

Массивы можно транспонировать относительно диагонали  $i = j$ :

$$a \mapsto a^t : a^t(i, j) = a(j, i). \quad (4-3)$$

На множестве  $\mathcal{M}$  всех массивов действуют четыре набора *уплотняющих операций*

$$D_j, \quad U_j, \quad L_i, \quad R_i, \quad \text{где } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-1.$$

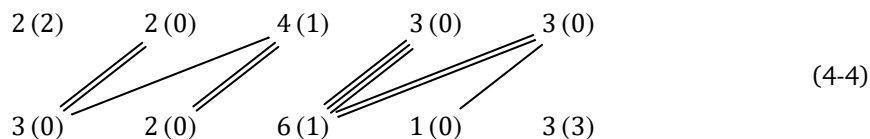
При применении любой из этих операций к данному массиву  $a \in \mathcal{M}$  массив  $a$  либо никак не меняется, либо ровно один его шарик перемещается ровно на одну клетку вниз (Down), вверх (Up), влево (Left) или вправо (Right) в соответствии с обозначением для операции.

**4.1.1. Вертикальные операции  $D_j$  и  $U_j$**  перемещают один шар по вертикали в пределах соседних  $j$ -й и  $(j+1)$ -й строк или ничего не делают. Чтобы узнать, какой именно шар следует передвинуть или убедиться в том, что такого шара нет, следует вначале установить между этими строками *устойчивое паросочетание*<sup>1</sup>. Делается это следующим образом.

Будем последовательно перебирать шары в  $(j+1)$ -й строке двигаясь слева направо и либо назначать им партнёров в  $j$ -й строке, либо объявлять *свободными*. Пусть очередной шар  $sh$  лежит в клетке  $(i, j+1)$ . Его партнёром называем *самый правый* шар из тех, что лежат в  $j$ -й строке *строго левее*  $i$ -го столбца и ещё не назначены никому партнёрами. Если таких шаров нет, шар  $sh$  объявляется свободным. После того, как все шары  $(j+1)$ -й строки будут разделены на свободные

<sup>1</sup>По-английски: *stable matching*.

и имеющие партнёров, все шары  $j$ -й строки, не являющиеся ничьими партнёрами, также объявляются свободными. Вот пример такого паросочетания (в скобках указано число свободных шаров):



Операция  $D_j$  опускает на одну клетку вниз самый правый свободный шар  $(j + 1)$ -й строки или ничего не делает, если свободных шаров в  $(j + 1)$ -й строчке нет. Операция  $U_j$  поднимает на одну клетку вверх самый левый свободный шар  $j$ -й строки или ничего не делает, если в  $j$ -й строке нет свободных шаров. Так, в примере (4-4) операция  $D_j$  (соотв.  $U_j$ ) опускает вниз (соотв. поднимает вверх) верхний (соотв. нижний) свободный шар в третьей колонке.

Если операция изменяет массив, мы будем говорить, что она действует на этот массив *эффективно*. Из конструкции устойчивого паросочетания видно, что все свободные шары  $j$ -й строки лежат нестрого правее свободных шаров  $(j + 1)$ -й строки, и когда операция  $D_j$  действует на массив  $a$  эффективно, опущенный ею шар становится самым левым свободным шаром  $j$ -й строки в устойчивом паросочетании между преобразованными строками. Поэтому операция  $U_j$ , применённая к массиву  $D_j a$  поднимет этот опущенный шар назад, т. е.  $U_j D_j a = a$  всякий раз, когда  $D_j$  действует на  $a$  эффективно. Аналогично, если  $U_j$  действует эффективно, то  $D_j U_j a = a$ . Говоря неформально, набор вертикальных операций  $D, U$  образует структуру, близкую к групповой — исходный массив  $a$  однозначно восстанавливается из результата применения к нему слова  $D = D_{j_1} \cdots D_{j_k}$  по формуле  $a = U_{j_k} \cdots U_{j_1} D_{j_1} \cdots D_{j_k} a$  при условии, что каждая буква  $D_j$  действует эффективно. Мы будем называть такие  $D$ -слова  *$a$ -эффективными* или просто *эффективными*, если понятно, о каком  $a$  идёт речь.

**4.1.2. Горизонтальные операции  $L_i$  и  $R_i$**  определяются симметричным образом: они действуют в  $i$ -м и  $(i + 1)$ -м столбцах и превращаются в операции  $D$  и  $U$  при транспонировании массива, т. е.  $L_i(a) = (D_i(a^t))^t$  и  $R_i(a) = (U_i(a^t))^t$ .

Упражнение 4.1. Проговорите это определение явно: объясните, как установить устойчивое паросочетание между  $i$ -м и  $(i + 1)$ -м столбцом, и укажите какой именно шар перемещают горизонтальные операции  $R_i$  и  $L_i$ .

Отметим, что операции  $D, L$  сохраняют столбцовый вес, а операции  $R, U$  — строчный.

Лемма 4.1 (лемма о коммутировании)

Каждая из горизонтальных операций  $L_i, R_i$  перестановочна с каждой из вертикальных операций  $D_j, U_j$ .

Доказательство. Мы покажем, что  $D_j$  и  $U_j$  перестановочны с  $L_i$  — остальные случаи разбираются аналогично. Пусть действие операции  $L_i$  заключается в перемещении шара  $\mathbf{ш}$  на одну клетку влево. Достаточно убедиться, что устойчивое паросочетание между  $(j + 1)$ -й и  $j$ -й строками можно организовать так, что после перемещения шара  $\mathbf{ш}$  связанными в пары будут ровно те же самые шары, что и до его перемещения. Это очевидно, когда  $\mathbf{ш}$  лежит вне  $(j + 1)$ -й и  $j$ -й строк. Рассмотрим оставшиеся два случая.

Пусть  $\mathbf{ш}$  лежит в  $(j + 1)$ -й строчке, т. е. в клетке  $(i + 1, j + 1)$ , как на левом из рис. 4◊1. Тогда все шары из клетки  $(i, j)$  имеют партнёров в клетке  $(i + 1, j + 1)$ , иначе шар  $\mathbf{ш}$  получил бы себе партнёра в клетке  $(i, j)$  в паросочетании между  $i$ -м и  $(i+1)$ -м столбцом. Поэтому, если в строчном

паросочетании у шара  $u$  был партнёр, то он был строго левее клетки  $(i, j)$ , а значит, останется партнёром после перемещения  $u$  на клетку влево. А если партнёра у  $u$  не было, то он и не появится. Таким образом, при перемещении  $u$  строчное паросочетание не изменяется.

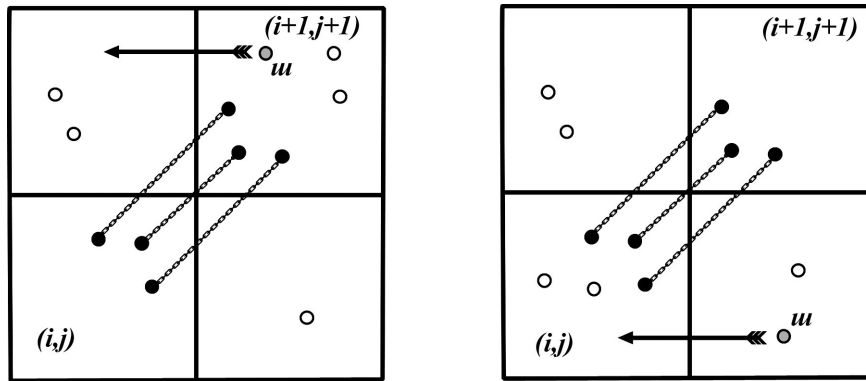


Рис. 4.1. Действие  $L_i$  не меняет устойчивого вертикального паросочетания.

Пусть теперь  $u$  лежит в  $j$ -й строчке, как на правом из рис. 4.1. Поскольку он является самым верхним свободным шаром в столбцовом паросочетании, все шары из клетки  $(i+1, j+1)$  имеют партнёров в клетке  $(i, j)$ . Но тогда и в строчном паросочетании все шары из  $(i+1, j+1)$ -й клетки имеют партнёров в клетке  $(i, j)$ . Поэтому если после перемещения на клетку влево у шара  $u$  имеется партнёр в строчном паросочетании, то он находится строго правее клетки  $(i+1, j+1)$ , а значит, является партнёром шара  $u$  и до его перемещения. А если у перемещённого шара  $u$  нет партнёра в строчном паросочетании, то его не было и до перемещения.  $\square$

#### Следствие 4.1

Слово  $H$ , составленное из горизонтальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на массив  $a$ , когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из  $a$  вертикальными операциями. Симметричным образом, слово  $V$ , составленное из вертикальных операций, эффективно действует на  $a$  если и только если оно эффективно действует на любой массив, получающийся из  $a$  горизонтальными операциями.

**Доказательство.** Мы докажем первое утверждение, второе получается из него транспонированием. Достаточно проверить, что для любых  $i, j$  операция  $L_i$  эффективно действует на  $a$  тогда и только тогда, когда она эффективно действует на  $D_j a$ , и только тогда, когда она эффективно действует на  $U_j a$ . Если  $L_i a = a$ , то  $L_i D_j a = D_j L_i a = D_j a$ , и  $L_i U_j a = U_j L_i a = U_j a$ . Наоборот, если  $L_i a \neq a$ , то  $i$ -тая компонента столбцового веса  $w^I(L_i a)$  будет строго больше  $i$ -й компоненты  $w^I(a)$ , а так как  $D_j$  и  $U_j$  не меняют столбцовый вес, то  $L_i D_j a = D_j L_i a \neq D_j a$ , и  $L_i U_j a = U_j L_i a \neq U_j a$ .  $\square$

**4.2. Уплотнение массивов.** Будем называть массив D-, L-, R- или U-плотным (т. е. плотным вниз, влево, вправо или вверх), если все элементарные операции соответствующего типа действуют на него тождественно. Применение к произвольному массиву достаточно большого числа операций одного из типов приводит к плотному в соответствующую сторону массиву. Такое уплотнение, как правило, можно производить многими разными способами. На рис. 4.2 на стр. 50 показаны два пути уплотнения достаточно произвольного массива  $3 \times 2$ . Обратите

внимание, что результат уплотнения оказался не зависящим от способа уплотнения. Мы докажем это фундаментальное свойство уплотнений в [предл. 4.1](#), но прежде сделаем одно важное замечание о связи массивов с диаграммами Юнга.

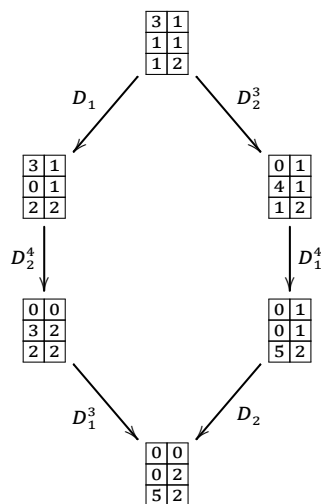


Рис. 4♦2. Два пути уплотнения вниз.

**4.2.1. Биplotные массивы и диаграммы Юнга.** Из [сл. 4.1](#) вытекает, что при действии вертикальных операций на плотный влево или вправо массив этот массив будет оставаться плотным в ту же сторону. То же самое справедливо для действия горизонтальных операций на массив, который плотен вниз или вверх. Поэтому любой массив можно сделать плотным одновременно в каком-нибудь вертикальном и в каком-нибудь горизонтальном направлении. Мы будем называть такие массивы DL-плотными, DR-плотными, и т. п. Поскольку далее мы будем заниматься в основном DL-уплотнениями, условимся называть просто *биplotными* массивы, плотные одновременно *вниз* и *влево*. Все шары в биplotном массиве лежат лишь в клетках главной диагонали  $i = j$ , причём их количества нестрого убывают с ростом  $i$ . Поэтому столбцовый вес биplotного массива равен строчному и представляет собой диаграмму Юнга  $\lambda = w^l(b) = w^l(b)$ , т. е. биplotные массивы  $b$  взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга<sup>1</sup>. Диаграмма Юнга, отвечающая биplotному массиву, который получается DU-уплотнением данного массива  $a$ , называется *формой* массива  $a$  и обозначается  $\Phi(a)$ . Докажем теперь, что это понятие корректно.

Предложение 4.1

Результат D-, L-, R- или U-уплотнения не зависит от выбора последовательности уплотняющих операций.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай D-уплотнения. Если массив  $a$  плотен влево, то результат его D-уплотнения — это биplotный массив, отвечающий диаграмме Юнга  $w^l(a)$ . Поскольку  $w^l(a)$  не меняется при вертикальных уплотняющих операциях, результат D-уплотнения

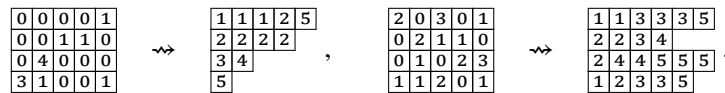
<sup>1</sup>Здесь и далее в этом параграфе мы отождествляем между собою две конечных последовательности неотрицательных целых чисел, получающиеся одна из другой приписыванием справа любого числа нулей. Например, мы считаем равными диаграммы  $(2, 1, 1)$  и  $(2, 1, 1, 0, 0, 0)$ .

L-плотного массива не зависит от способа уплотнения. Пусть теперь  $a$  произволен. Зафиксируем какое-нибудь слово  $L = L_{i_k} \dots L_{i_1}$ , эффективно уплотняющее  $a$  влево до L-плотного массива  $a' = La$ . Тогда для любого такого слова  $D = D_{j_m} \dots D_{j_1}$ , что  $Da$  плотен вниз, действие  $L$  на  $Da$  тоже будет эффективным, а массив  $LDa = DLa$  будет биplotен<sup>1</sup>. Таким образом, мы можем записать  $Da$  как  $L^{-1}DLa$ . Поскольку массив  $DLa$  является D-уплотнением L-плотного массива  $La$ , он по уже доказанному не зависит от выбора уплотняющего слова  $D$ , а значит и массив  $Da = L^{-1}DLa$  тоже не зависит от выбора  $D$ .  $\square$

**4.2.2. Плотные массивы и таблицы Юнга.** Из любого массива высоты  $m$  и ширины  $n$  можно изготовить  $m$  слов (по одному слову из каждой строки массива), записанных алфавитом  $\{1, \dots, n\}$ . Делается это при помощи процедуры, которая называется *строчной развёрткой* массива и состоит в следующем. Интерпретируем все шарики массива как буквы, равные номеру того столбца, где стоит шарик. После этого пройдем по каждой строке слева направо, выписывая подряд все встречающиеся буквы. В результате  $j$ -тая строка массива развернется в слово

$$\underbrace{1 \dots 1}_{a(1,j)} \underbrace{2 \dots 2}_{a(2,j)} \dots \dots \dots \underbrace{n \dots n}_{a(n,j)} .$$

Получающиеся  $m$  слов запишем друг под другом в столбик, *сверху вниз*<sup>2</sup>, выровняв их по левому краю. Например:



Очевидно, что буквы в каждом слове строчной развёртки нестрого возрастают. Условие плотности массива вниз (как в левом примере выше) означает, что под каждой буквой « $i$ » в  $j$ -том слове, т. е. под шариком, пришедшим из клетки  $a(i, j)$ , стоит строго большая, чем « $i$ », буква из  $(j + 1)$ -го слова — партнёр этого шарика при устойчивом паросочетании между  $j$ -й и  $(j + 1)$ -й строками. Следовательно, длины слов строчной развёртки плотного вниз массива нестрого убывают сверху вниз, т. е. образуют диаграмму Юнга, а буквы  $\{1, \dots, n\}$  заполняют эту диаграмму нестрого возрастаая по строкам и *строго* возрастаая по столбцам. Такие заполнения данной диаграммы  $\lambda$  называются *таблицами Юнга* формы  $\lambda$  на алфавите  $I = \{1, \dots, n\}$ . Мы доказали следующий комбинаторный факт:

**ЛЕММА 4.2**

Строчная развёртка задаёт биекцию между плотными вниз массивами размера  $m \times n$  и таблицами Юнга из не более  $m$  строк на алфавите  $\{1, \dots, n\}$ .  $\square$

**4.2.3. Плотные массивы и тексты Яманучи.** L-плотность массива  $a$  можно воспринимать как D-плотность транспонированного массива  $a^t$  и формулировать в терминах столбцовой развёртки: плотные влево массивы размера  $m \times n$  биективно соответствуют таблицам Юнга из не более  $n$  строк в алфавите  $J$ . Полезно, однако, охарактеризовать L-плотность в терминах *строчной* развёртки. Для этого будем читать слова строчной развёртки L-плотного массива  $a$  *справа налево* одно за другим, сверху вниз. Условие плотности влево означает тогда, что в любом начальном куске получающейся последовательности букв единиц будет не меньше, чем двоек,

<sup>1</sup>Ибо применение  $L$  сохраняет свойство массива  $Da$  быть плотным вниз, а применение  $D$  сохраняет свойство массива  $La$  быть плотным влево.

<sup>2</sup>Таким образом, из нижней строки массива получается верхнее слово и т. д.

двоек — не меньше, чем троек, и т. д. для всех пар последовательных букв « $i$ » и « $(i + 1)$ » из  $I$ . В комбинаторике такой текст называют *текстом Яманучи*. Например, левая из двух строчных развёрток

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \\ \hline 2 & 3 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline \end{array}$$

является текстом Яманучи, а правая — нет. Итак, нами установлена

#### Лемма 4.3

Строчная развёртка задаёт биекцию между плотными влево массивами размера  $m \times n$  и текстами Яманучи из не более  $m$  слов в алфавите  $\{1, \dots, n\}$ .  $\square$

**4.2.4. Послойное произведение.** Если заданы два отображения множеств  $\varphi : X \rightarrow Z$  и  $\psi : Y \rightarrow Z$ , то дизъюнктное объединение прямых произведений их слоёв над всеми точками  $z \in Z$  обозначается

$$X \times_Z Y \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{z \in Z} \varphi^{-1}(z) \times \psi^{-1}(z)$$

и называется *послойным* (или *расслоенным*) произведением множеств  $X$  и  $Y$  над  $Z$  по отображениям  $\varphi$  и  $\psi$ . Послойные проекции  $\pi_X : (x, y) \mapsto x$  и  $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$  включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & X \times_Z Y & \\ \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\ X & & Y \\ \varphi \searrow & & \swarrow \psi \\ & Z & \end{array} \quad (4-5)$$

которая называется *декартовым квадратом*. Она универсальна в том смысле, что для любого другого коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \xi \swarrow & & \searrow \eta \\ X & & Y \\ \varphi \searrow & & \swarrow \psi \\ & Z & \end{array}$$

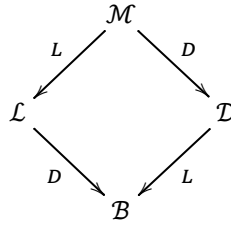
имеется единственное такое отображение  $\alpha : M \rightarrow X \times_Z Y$ , что  $\xi = \pi_X \circ \alpha$  и  $\eta = \pi_Y \circ \alpha$ .

**Упражнение 4.2.** Убедитесь в этом и покажите, что универсальное свойство определяет верхний угол квадрата (4-5) однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми стрелками квадрата.

#### Теорема 4.1

Множество всех массивов  $\mathcal{M}$  является послойным произведением множеств плотных влево массивов  $\mathcal{L}$  и плотных вниз массивов  $\mathcal{D}$  над множеством биplotных массивов  $\mathcal{B}$  по отображениям

уплотнения влево и уплотнения вниз, т. е. коммутативный квадрат



в котором стрелки  $L$  и  $D$  переводят массив в его уплотнения влево и вниз, является декартовым.

Доказательство. По [предл. 4.1](#) стрелки  $L$  и  $D$  корректно определены и перестановочны друг с другом. Надо показать, что отображение  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$ , сопоставляющее массиву  $a$  пару  $(La, Da)$  со свойством  $DLa = LDa \in \mathcal{B}$ , взаимно однозначно. Докажем его инъективность. Пусть массивы  $a$  и  $a'$  таковы, что  $La = La'$  и  $Da = Da'$ , а слово  $\Lambda$  эффективно уплотняет массив  $Da = Da'$  влево. Тогда  $\Lambda$  эффективно действует на  $a$  и  $a'$  так, что  $\Lambda a = \Lambda a' = La = La'$ , откуда  $a = \Lambda^{-1}La = \Lambda^{-1}La' = a'$ . Теперь докажем сюръективность. Для любой пары массивов  $(a_\ell, a_d)$ , в которой  $a_\ell$  плотен влево,  $a_d$  плотен вниз, и  $Da_\ell = La_d$ , рассмотрим слово  $\Lambda$ , эффективно уплотняющее  $a_d$  влево до  $La_d$ . Обратное слово  $\Lambda^{-1}$  эффективно действует на  $La_d = Da_\ell$ , а значит, и на  $a_\ell$ . Массив  $a = \Lambda^{-1}a_\ell$  таков, что  $La = a_\ell$  и  $Da = D\Lambda^{-1}a_\ell = \Lambda^{-1}Da_\ell = \Lambda^{-1}La_d = a_d$ .  $\square$

Пример 4.1 (ГРАФИКИ ОТОБРАЖЕНИЙ И СТАНДАРТНЫЕ ТАБЛИЦЫ)

График отображения множеств  $a: I \rightarrow J$  — это массив, в каждом столбце которого имеется ровно один шарик. По [теор. 4.1](#) такие массивы взаимно однозначно параметризуются парами  $(a_\ell, a_d)$  в которой  $a_\ell$  плотен влево,  $a_d$  плотен вниз, причём оба этих массива имеют одинаковую форму  $Da_\ell = La_d$ , и  $w^I(a_d) = (1, \dots, 1)$ . Согласно [п° 4.2.2](#), каждая такая пара однозначно описывается следующим набором данных:

- форма  $\Phi(a)$  массива  $a$ , т. е. диаграмма Юнга  $\lambda = DLa$  веса  $|\lambda| = n$
- строчная развёртка D-уплотнения  $a_d$  массива  $a$ , т. е. таблица Юнга формы  $\lambda$  на алфавите  $I$ , в которой каждая буква встречается ровно один раз
- столбцовая развёртка L-уплотнения<sup>1</sup>  $a_\ell$  массива  $a$ , т. е. таблица Юнга формы  $\lambda$  на алфавите  $J$ .

Число всех таблиц Юнга формы  $\lambda$  на  $m$ -буквенном алфавите принято обозначать через  $d_\lambda(m)$ . Таблицы формы  $\lambda$  заполненные без повторений числами от 1 до  $|\lambda|$  называются *стандартными таблицами* формы  $\lambda$ , и их число обозначается просто через  $d_\lambda$ . Так как всего имеется  $m^n$  отображений  $I \rightarrow J$ , мы получаем соотношение

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda} \cdot d_{\lambda}(m) = m^n, \quad (4-6)$$

где суммирование идёт по всем  $n$ -клеточным диаграммам Юнга и числа  $d_{\lambda}(m)$  отличны от нуля только для диаграмм из  $\leq m$  строк. В ситуации, когда  $\#J = \#I = n$  и рассматриваются только взаимно однозначные отображения  $I \rightarrow J$ , предыдущая конструкция устанавливает биекцию

<sup>1</sup>Т. е. строчная развёртка транспонированного массива  $a_\ell^t$ .

между  $n!$  элементами симметрической группы  $S_n$  и парами стандартных таблиц одинаковой формы веса  $n$ , откуда

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda}^2 = n!, \quad (4-7)$$

где сумма идёт о всем  $n$ -клеточным диаграммам. Эта биекция индуцирует взаимно однозначное соответствие между инволютивными перестановками<sup>1</sup>  $\sigma \in S_n$  и самосопряжёнными массивами  $a = a^t$ , которым в по теор. 4.1 отвечают пары одинаковых стандартных таблиц. Поэтому

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda} = \#\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = 1\}. \quad (4-8)$$

**4.3. Действие симметрической группы на DU-множествах.** Всякое множество массивов, которое переводится в себя вертикальными операциями  $D$  и  $U$ , называется *DU-множеством*. Гомоморфизмы DU-множеств — это отображения, перестановочные с действием операций  $D$  и  $U$  на этих множествах. DU-множество, на котором операции  $D$  и  $U$  действуют транзитивно, называется *DU-орбитой*. DU-орбиты взаимно однозначно соответствуют плотным вниз массивам. Орбита  $O$  такого массива  $a_d$  состоит из всевозможных массивов, которые можно получить из  $a_d$  эффективными  $U$ -словами. Мы будем называть  $a_d$  *нижним концом* орбиты  $O$ .

Лемма 4.4

Объединения, пересечения и разности DU-множеств также являются DU-множествами. Всякое DU-множество является дизъюнктивным объединением DU-орбит.

Доказательство. Не вполне очевидно, разве что, утверждение про разности. Пусть  $A'$  и  $A''$  DU-инвариантны и  $a' \in A' \setminus A''$ . Если  $D_j a' \in A''$ , то  $D_j$  действует эффективно, и тогда  $a' = U_j D_j a'$  тоже лежит в  $A''$ .  $\square$

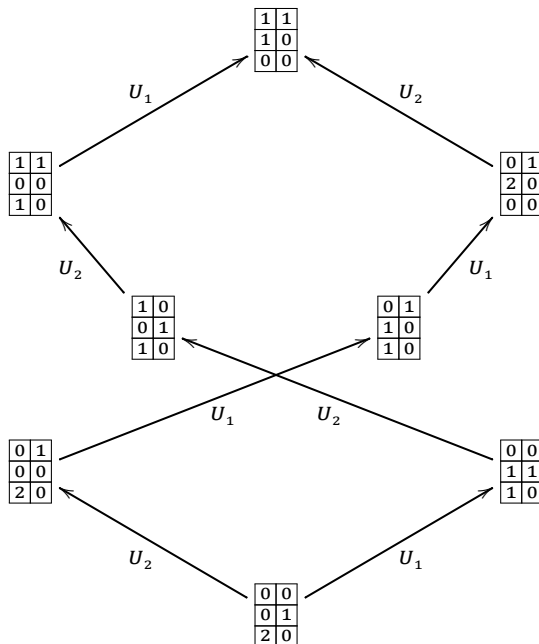


Рис. 4-3. Стандартная DU-орбита  $O_{(2,1)}$ .

<sup>1</sup>Т. е. такие, что  $\sigma^2 = 1$ .



**4.3.1. Стандартные орбиты.** DU-орбиты  $O_\lambda$  биплотных массивов  $\lambda$  называются *стандартными*. Например, при  $m = 3$  стандартная орбита  $O_{(2,1)}$ , отвечающая диаграмме – таблице – массиву

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

состоит из восьми массивов, представленных на рис. 4◊3.

Из теоремы о биекции вытекает, что уплотнение влево задаёт изоморфизм любой DU-орбиты  $O$  со стандартной орбитой  $O_\lambda$ , нижний конец которой является биуплотнением нижнего конца орбиты  $O$ . Мы будем называть диаграмму  $\lambda$  *типом* орбиты  $O$ . Количество орбит типа  $\lambda$  в данном DU-множестве  $M$  равно количеству плотных вниз массивов строчного веса  $\lambda$ , имеющих в  $M$ .

**4.3.2. Действие симметрической группы  $S_m = \text{Aut}(J)$ .** На каждом DU-множестве массивов  $M$  имеется действие элементарных транспозиций  $\sigma_j = (j, j + 1)$ , порождающих симметрическую группу  $S_m$  перестановок вертикального множества индексов  $J$ . Оно определяется следующим образом. Пусть после установления устойчивого паросочетания между  $j$ -й и  $(j + 1)$ -й строками в них оказалось  $s_j$  и  $s_{j+1}$  свободных шаров соответственно. Положим

$$\sigma_j = D_j^{s_{j+1}-s_j} = U_j^{s_j-s_{j+1}}. \tag{4-9}$$

Подробнее эту процедуру можно описать так. Свернём массив в вертикальный цилиндр, приклеив правую границу  $n$ -го столбца к левой границе первого, и продолжим устойчивое паросочетание по кругу, т. е. назначим в пару самому правому нижнему свободному шару самый левый свободный верхний и т. д. В результате останется ровно  $|s_{j+1} - s_j|$  свободных шаров и все они будут располагаться или только в верхней или только в нижней строке — там где их вначале было больше. Операция  $\sigma_j$  просто передвигает их по вертикали в другую строку или ничего не делает, если  $s_j = s_{j+1}$ . В частности, действие  $\sigma_j$  на строчный вес  $w^J$  состоит в перестановке  $j$ -й и  $(j + 1)$ -й координаты.

Из предыдущего описания видно, что  $\sigma_j^2 = \text{Id}$ , а также, что  $\sigma_j$  коммутирует с циклическими перестановками столбцов. Очевидно также, что  $\sigma_j$  перестановочна с горизонтальными операциями  $R, L$  и со всеми  $\sigma_k$  с  $|k - j| \geq 2$ . Чтобы действие  $\sigma_j$  непротиворечиво продолжалось на всю симметрическую группу  $S_m$  достаточно проверить соотношения треугольника  $\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}$ . При этом можно считать массив трёхстрочным. Левое уплотнение  $L$  и циклическая перестановка столбцов  $C$  превращает любой трёхстрочный массив в однострочный:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline * & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & * \\ \hline \end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & * \\ \hline * & * & 0 \\ \hline * & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & * \\ \hline * & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & * \\ \hline \end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & 0 \\ \hline * & 0 & 0 \\ \hline * & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ \hline 0 & * \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|} \hline * & 0 \\ \hline * & 0 \\ \hline * & 0 \\ \hline \end{array}$$

на который  $\sigma_j$  и  $\sigma_{j+1}$  действуют перестановками строк, и соотношение треугольника, таким образом, выполняется.

**4.4. Полиномы Шура.** Интерпретируем все шары в  $j$ -й строке как переменные  $x_j$  и сопоставим каждому массиву  $a$  моном  $x^a \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{w_1^j(a)} x_2^{w_2^j(a)} \dots x_m^{w_m^j(a)}$ , равный произведению всех его шаров. Сумма этих мономов по всем массивам данного DU-множества  $M$  обозначается

$$s_M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a \in M} x^a \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$$

и называется (комбинаторным) многочленом Шура DU-множества  $M$ . Симметрическая группа  $S_m$  переставляет координаты весового вектора и действует на мономы  $x^a$  перестановками переменных. Таким образом, все многочлены Шура являются симметрическими.

Поскольку каждое DU-множество  $M$  является объединением непересекающихся орбит, а всякая орбита изоморфна стандартной орбите  $O_\lambda$ , произвольный полином Шура является линейной комбинацией с неотрицательными целыми коэффициентами стандартных многочленов Шура  $s_\lambda(x)$ , отвечающих биplotным массивам (диаграммам Юнга)  $\lambda$ :

$$s_M(x) = \sum_{\lambda \in \Phi(M)} c_M^\lambda \cdot s_\lambda(x), \quad (4-10)$$

где суммирование происходит по всем формам  $\lambda$  массивов из  $M$ , и коэффициент  $c_M^\lambda$  равен числу DU-орбит, изоморфных  $O_\lambda$ , т. е. количеству всех плотных вниз массивов  $J$ -веса  $\lambda$  в  $M$ . Согласно п° 4.2.2, элементы стандартной орбиты  $O_\lambda$  суть всевозможные L-плотные массивы формы  $\lambda$ , и столбцовая развёртка устанавливает биекцию между такими массивами и таблицами Юнга формы  $\lambda$  в алфавите  $\{x_1, \dots, x_m\}$ . Таким образом, стандартный полином Шура имеет вид

$$s_\lambda(x) = \sum_{\eta} K_{\lambda, \eta} \cdot x^\eta = \sum_{\eta} K_{\lambda, \eta} \cdot x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \cdots x_m^{\eta_m}, \quad (4-11)$$

где  $\eta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  пробегает  $m$ -мерные целочисленные векторы с неотрицательными координатами, а коэффициент  $K_{\lambda, \eta}$  равен числу таблиц формы  $\lambda$ , заполненных  $\eta_1$  единицами,  $\eta_2$  двойками и т. д. Мы будем говорить, что такая таблица имеет состав  $\eta$ .

Например, при  $m = 3$  из представленной на рис. 4♦3 на стр. 54 схемы получаем

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2.$$

Число  $K_{\lambda, \eta}$  таблиц формы  $\lambda$  и состава  $\eta$  называется числом Костки. Отметим, что  $K_{\lambda, (1^{|\lambda|})} = d_\lambda$  равно числу стандартных таблиц формы  $\lambda$ , все  $K_{\lambda, \lambda} = 1$ , и  $K_{\lambda, \eta} \neq 0$  только когда при каждом  $j = 1, 2, 3, \dots$  выполняется неравенство  $\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geq \eta_1 + \dots + \eta_j$ . В этой ситуации говорят, что диаграмма  $\lambda$  доминирует вектор  $\eta$  и пишут  $\lambda \succeq \eta$ .

Упражнение 4.3. Покажите, что отношение доминирования задаёт на множестве диаграмм

Юнга заданного веса  $n$  частичный порядок, полный при  $n \leq 5$ , и приведите пример двух несравнимых между собою диаграмм Юнга веса 6.

Из (4-11) видно, что стандартные полиномы Шура  $s_\lambda(x_1, \dots, x_m)$ , где  $\lambda$  пробегает все диаграммы Юнга из не более  $m$  строк, выражаются через базисные мономиальные симметрические многочлены  $m_\mu$  при помощи унитарной матрицы

$$s_\lambda = \sum_{\mu \preceq \lambda} K_{\lambda, \mu} \cdot m_\mu. \quad (4-12)$$

Поскольку такая матрица обратима над  $\mathbb{Z}$ , многочлены  $s_\lambda$  тоже образуют базис  $\mathbb{Z}$ -модуля симметрических функций.

Пример 4.2 (полные и элементарные симметрические многочлены)

Многочлен  $s_{(k)}(x)$ , отвечающий DU-орбите одностолбцового массива формы

$$\lambda = (k) = (k, 0, \dots, 0) = \underbrace{\square \cdots \square}_k,$$

представляет собой *полный симметрический многочлен*  $h_k(x)$  — сумму всех мономов общей степени  $k$  от  $x_1, \dots, x_n$ . В самом деле, столбцовая развёртка плотного влево массива из орбиты  $O_{(k)}$  — это однострочная таблица Юнга, и для любого содержания  $\eta$  веса  $|\eta| = k$  имеется ровно одна такая таблица<sup>1</sup>. Эквивалентно: DU-орбита одностолбцового массива веса  $k$  образована всеми возможными расположениями  $k$  шариков по  $t$  ящикам столбца.

Симметричным образом, многочлен  $s_{(1^k)}$  DU-орбиты  $k$ -столбцового массива формы

$$\lambda = 1^k = (\underbrace{1, \dots, 1}_k) = \left. \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} k$$

это *элементарный симметрический многочлен*  $e_k(x)$ , т. е. сумма всех линейных по каждой переменной мономов общей степени  $k$  от  $x_1, \dots, x_n$ . Причина та же, только теперь столбцовая развёртка каждого плотного влево массива из орбиты  $O_{1^k}$  представляет собою одностолбцовую таблицу Юнга, в которой все номера переменных строго возрастают сверху вниз.

Пример 4.3 (тождества Коши и Шура.)

Интерпретируем каждый шарик в клетке  $(i, j)$  массива  $a$  как билинейный моном  $x_i y_j$  от двух наборов переменных  $x = x^I = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = y^J = (y_1, \dots, y_m)$ . Перемножая вместе все шарики массива  $a$ , мы получим (в обозначениях н° 4.4) моном  $x^{a^t} y^a$ . По теореме о биекции из теор. 4.1 сумма таких мономов по всем массивам  $a$  фиксированной формы  $\lambda = \Phi(a)$  равна произведению многочленов Шура  $s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y)$ , и значит сумма мономов  $x^{a^t} y^a$  по вообще всем массивам  $a$  формата  $I \times J$  равна сумме таких произведений по всем диаграммам Юнга  $\lambda$ . С другой стороны, сумма всех мономов  $x^{a^t} y^a$  по всем массивам  $a$  получается при раскрытии скобок в произведении геометрических прогрессий  $\prod_{I \times J} (1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + (x_i y_j)^3 + \dots)$ , поскольку выбирая из  $(i, j)$ -го сомножителя слагаемое  $(x_i y_j)^{a(i,j)}$ , мы получаем моном  $x^{a^t} y^a$ , отвечающий массиву  $a$ . Мы получили *тождество Коши*:

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) \cdot s_{\lambda}(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j}. \quad (4-13)$$

Если взять  $I = J$ , ограничиться только симметричными массивами  $a = a^t$ , положить  $x = y = \xi$ , извлечь из каждого полученного  $a$ -монома корень  $\xi^a = \sqrt{\xi^{a^t} \xi^a}$  и просуммировать по всем симметричным массивам  $a$  заданной формы  $\lambda$ , мы получим многочлен  $s_{\lambda}(\xi)$ , а суммируя по вообще всем симметричным массивам  $a$  — сумму  $\sum_{\lambda} s_{\lambda}(\xi)$ . Тот же ответ даст раскрытие скобок в произведении  $\prod_k (1 + \xi_k + (\xi_k)^2 + (\xi_k)^3 + \dots) \cdot \prod_{i < j} (1 + \xi_i \xi_j + (\xi_i \xi_j)^2 + (\xi_i \xi_j)^3 + \dots)$ . Записывая геометрические прогрессии рациональными дробями, получаем *тождество Шура*:

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(\xi) = \prod_i \frac{1}{1 - \xi_i} \cdot \prod_{i < j} \frac{1}{1 - \xi_i \xi_j}. \quad (4-14)$$

**4.5. Правило Литтлвуда – Ричардсона.** Произведение  $s_M(x) \cdot s_N(x)$  полиномов Шура DU-множеств  $M$  и  $N$  является полиномом Шура для DU-множества, состоящего из всевозможных массивов вида  $ab$  размера  $(2n) \times t$ , получающихся приписыванием какого-нибудь массива  $b \in N$

<sup>1</sup>В которой все переменные упорядочены по нестрогому возрастанию номеров.

справа к какому-нибудь массиву<sup>1</sup>  $a \in M$ . Множество таких массивов естественно обозначить через  $M \otimes N$  и называть *тензорным произведением* DU-множеств  $M$  и  $N$ . Итак,

$$s_M(x) \cdot s_N(x) = \left( \sum_{a \in M} x^a \right) \cdot \left( \sum_{b \in N} x^b \right) = \sum_{\substack{a \in M \\ b \in N}} x^{ab} = \sum_{c \in M \otimes N} x^c.$$

Поскольку стандартные полиномы  $s_\lambda$  образуют базис модуля симметрических функций, произведение  $s_\lambda s_\mu$  можно записать как

$$s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^{\nu} \cdot s_{\nu}. \quad (4-15)$$

ТЕОРЕМА 4.2 (ПРАВИЛО ЛИТТЛВУДА – РИЧАРДСОНА)

Суммирование в формуле (4-15) происходит по всем диаграммам  $\nu$ , получающимся добавлением  $|\mu|$  клеток к диаграмме  $\lambda$ , а коэффициент  $c_{\lambda\mu}^{\nu}$  равен количеству таких заполнений этих дописанных клеток  $\mu_1$  единицами,  $\mu_2$  двойками,  $\mu_3$  тройками и т. д., что вдоль строк «косой диаграммы»  $\nu \setminus \lambda$  числа возрастают нестрого, а вдоль столбцов — строго (как в таблице Юнга), и одновременно текст, получающееся при прочтении этой «косой диаграммы» строку за строкой справа налево сверху вниз, содержит в каждом своём начальном куске единиц не меньше, чем двоек, двоек не меньше, чем троек и т. д. (т. е. является текстом Яманучи<sup>2</sup>).

УПРАЖНЕНИЕ 4.4. Пользуясь правилом Литтлвуда – Ричардсона, вычислите<sup>3</sup>  $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$  и  $s_{2,1}^2$ .

Доказательство. Мы должны подсчитать в DU-множестве  $O_\lambda \otimes O_\mu$  количество DU-орбит, которые уплотняются влево до стандартной орбиты  $O_\nu$ . Пусть массив  $ab$  лежит в такой орбите. Поскольку массивы  $a, b$  получены из биплотных массивов  $\lambda, \mu$  вертикальными операторами, оба они плотны влево и имеют  $I$ -веса  $\lambda$  и  $\mu$  соответственно. Заметим, что действие вертикальной уплотняющей операции  $D_j$  на «толстый» массив  $ab$  состоит либо в её действии отдельно на<sup>4</sup>  $b$ , либо в её действии отдельно на<sup>5</sup>  $a$ . Поэтому при уплотнении вниз «толстого» массива  $ab$  мы получим массив вида  $a'b'$ , в котором  $a'$  плотен вниз, и оба массива  $a', b'$  по прежнему плотны влево и имеют  $I$ -веса  $\lambda, \mu$ . Таким образом,  $a'$  биплотен формы  $\lambda$ . Если форма массива  $a'b' = \lambda b'$  равна  $\nu$ , то строки горизонтальной развёртки массива  $b'$  — это выровненные по левому краю строки «косой таблицы»  $\nu \setminus \lambda$ , заполненные именно так, как требует правило Литтлвуда – Ричардсона: первое, «табличное», ограничение выражает плотность вниз «толстого» массива  $ab$ , а второе, «текстовое», ограничение выражает, согласно п° 4.2.3, плотность влево массива  $b'$ .  $\square$

<sup>1</sup>При этом вертикальный  $J$ -алфавит не меняется, а горизонтальный  $I$ -алфавит заменяется дизъюнктным объединением  $I$ -алфавитов массивов  $a$  и  $b$ .

<sup>2</sup>См. п° 4.2.3 на стр. 51.

<sup>3</sup>При этом поучительно убедиться в том, что применение теор. 4.2 к  $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$  и к  $s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$  (что не всё равно) приводит к одному и тому же результату.

<sup>4</sup>Если самый правый свободный шар при паросочетании внутри «толстого» массива  $ab$  лежит в  $b$ , то он подавно будет самым правым свободным шаром и для паросочетания, установленного отдельно внутри  $b$ .

<sup>5</sup>Если в  $b$  нет свободных шаров при паросочетании внутри «толстого» массива  $ab$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.5 (ФОРМУЛЫ ПЬЕРИ). Выведите из теор. 4.2 формулы Пьери:

$$s_\lambda \cdot e_k = s_\lambda \cdot s_{(1^k)} = \sum_{\mu} s_\mu \quad (4-16)$$

$$s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)} = \sum_{\nu} s_\nu \quad (4-17)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  пробегает все диаграммы, которые можно получить приписыванием  $k$  новых клеток к диаграмме  $\lambda$  так, чтобы никакие две новые клетки не попали в одну строку  $\mu$  и в один столбец  $\nu$ .

**4.5.1. Тождество Якоби – Трудн.** Из формулы Пьери (4-17) и формулы Пьери из сл. 3.6 на стр. 44 вытекает, что детерминантные полиномы Шура  $\Delta_{\delta+\lambda} / \Delta_\delta$  из предыдущего параграфа и комбинаторные полиномы Шура  $s_\lambda$  стандартных DU-орбит — это одни и те же полиномы. В самом деле, формулы Пьери позволяют однозначно выразить все многочлены Шура через многочлены  $h_k$ . Например, согласно (4-17)

$$\begin{aligned} s_{(2,2,1)} &= s_{(2,2)} h_1 - s_{(3,2)} \\ s_{(3,2)} &= s_{(3)} h_2 - s_{(5)} - s_{(4,1)} = h_3 h_2 - h_5 - s_{(4,1)} \\ s_{(2,2)} &= s_{(2)} h_2 - s_{(3,1)} - s_{(4)} = h_2^2 - h_4 - s_{(3,1)} \\ s_{(4,1)} &= s_{(4)} h_1 - s_{(5)} = h_4 h_1 - h_5 \\ s_{(3,1)} &= s_{(3)} h_1 - s_{(4)} = h_3 h_1 - h_4 \end{aligned}$$

откуда<sup>1</sup>  $s_{(2,2,1)} = -h_3 h_2 + h_4 h_1 + h_1 (h_2^2 - h_1 h_3)$ . В общем случае, оставляя в правой части формулы (4-17) диаграмму с самой длинной нижней строкой среди всех диаграмм с наибольшим количеством строк, мы выражаем её через  $h_k$  (где  $k$  равно длине этой нижней строки) и диаграммы, имеющие то же число строк, но более короткую нижнюю строчку, или строго меньшее число строк. Далее используем убывающую индукцию по количеству строк диаграммы Юнга и длине её нижней строки. Совпадение детерминантного и комбинаторного полиномов Шура известно как *тождество Якоби – Трудн.*

**4.5.2. Выражение  $e_\lambda$  и  $h_\lambda$  через  $s_\lambda$ .** Напомним, что для диаграммы Юнга  $\mu$  мы обозначаем через  $m_i$  количество строк длины  $i$  в этой диаграмме и полагаем

$$\begin{aligned} e_\mu &= e_{\mu_1} e_{\mu_2} \cdots e_{\mu_r} = e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n} \\ h_\mu &= h_{\mu_1} h_{\mu_2} \cdots h_{\mu_r} = h_1^{m_1} h_2^{m_2} \cdots h_n^{m_n}, \end{aligned}$$

где для  $k \in \mathbb{N}$  многочлены  $e_k(x) = s_{(1^k)}(x_1, \dots, x_m)$  и  $h_k(x) = s_{(k)}(x_1, \dots, x_m)$  суть элементарный<sup>2</sup> и полный<sup>3</sup> симметрические многочлены. Для произвольной диаграммы  $\eta$  многочлен  $h_\eta = s_{(\eta_1)} \cdots s_{(\eta_r)}$  является полиномом Шура DU-множества  $O_{(\eta_1)} \otimes \cdots \otimes O_{(\eta_r)}$ . Орбиты формы  $\nu$  в этом множестве биективно соответствуют своим нижним концам, которые в свою очередь, взаимно однозначно описываются таблицами формы  $\nu$  и содержания  $\eta$ . Тем самым,

$$h_\eta = \sum_{\nu} K_{\nu, \eta} \cdot s_\nu. \quad (4-18)$$

<sup>1</sup>Читателю рекомендуется проверить этот результат по формуле Джамбелли (3-25).

<sup>2</sup>См. п. 3.2 на стр. 38.

<sup>3</sup>См. п. 3.3 на стр. 39.

Многочлен  $e_\eta = s_{(1^{\eta_1})} \dots s_{(1^{\eta_r})}$  — это многочлен Шура DU-множества  $O_{(1^{\eta_1})} \otimes \dots \otimes O_{(1^{\eta_r})}$ , каждый массив в котором имеет  $|\eta|$  столбцов, разбитых на вертикальные подмассивы  $a_1, \dots, a_r$  ширины  $\eta_1, \dots, \eta_r$ , причём в каждом столбце находится ровно один шар, и  $j$ -номера этих шаров строго возрастают внутри каждого вертикального подмассива  $a_i$ . При уплотнении вниз последнее свойство сохранится, и в результате такого уплотнения мы получим массив  $a'_1 \dots a'_r$ , в котором шары каждого подмассива  $a'_i$  располагаются в разных строках, номера которых строго возрастают слева направо. Тем самым, каждый подмассив  $a'_i$  внесёт не более одного шара в каждую компоненту  $J$ -веса. Если суммарный  $J$ -вес при этом получится  $\nu$ , то записывая в каждую строку диаграммы  $\nu$  последовательно номера  $i$  тех подмассивов  $a'_i$ , которые дают вклад в эту компоненту  $J$ -веса, мы получим таблицу содержания  $\eta$  и формы  $\nu^t$ , сопряжённой<sup>1</sup> к форме  $\nu$ : в силу вышесказанного номера будут строго возрастать по строкам диаграммы  $\nu$ , а поскольку массив плотен вниз, они также должны не строго возрастать по столбцам; кроме того, по построению, каждый номер  $i$  будет представлен ровно в  $\eta_i$  различных строчках. Итак,

$$e_\eta = \sum_{\nu} K_{\nu^t, \eta} \cdot s_\nu. \quad (4-19)$$

Следствие 4.2

Инволюция  $\omega$  из [предл. 3.3](#), переводящая  $e_k$  и  $h_k$  друг в друга, действует на полиномы Шура по правилу  $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda^t}$ , т. е. переводит друг в друга многочлены, отвечающие транспонированным диаграммам Юнга.

Доказательство. Так как многочлены  $s_\lambda$  образуют базис  $\mathbb{Z}$ -модуля симметрических функций, отображение  $s_\lambda \mapsto s_{\lambda^t}$  однозначно задаёт на модуле симметрических функций  $\mathbb{Z}$ -линейную инволюцию. Из формул (4-18) и (4-19) следует, что эта инволюция переводит  $e_k$  в  $h_k$  и наоборот, т. е. совпадает с  $\omega$ .  $\square$

Следствие 4.3 (ВТОРАЯ ФОРМУЛА ДЖАМБЕЛЛИ)

$$s_{\lambda^t} = \det \begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_1+1} & \dots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & e_{\lambda_2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & e_{\lambda_{n-1}+1} \\ e_{\lambda_n-n+1} & \dots & e_{\lambda_n-1} & e_{\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad (4-20)$$

где по главной диагонали стоят  $e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n}$ , и при движении вдоль строк слева направо индексы у  $e$  с каждым шагом увеличиваются на единицу.  $\square$

Доказательство. Применяем инволюцию  $\omega$  к форм. (3-25) на стр. 43.  $\square$

**4.6. Скалярное произведение на модуле симметрических функций.** Введём на  $\mathbb{Z}$ -модуле симметрических функций<sup>2</sup>  $\Lambda$  евклидово скалярное произведение  $\langle *, * \rangle$ , для которого базис из полиномов Шура  $s_\lambda$  является ортонормальным. Из формул (4-18) и (4-12)

$$h_\lambda = \sum_{\mu \geq \lambda} K_{\mu, \lambda} \cdot s_\mu, \quad s_\mu = \sum_{\lambda \geq \mu} K_{\mu, \lambda} \cdot m_\lambda$$

<sup>1</sup> Или транспонированной, т. е. симметрично отражённой относительно главной диагонали.

<sup>2</sup> См. п. 3.7 на стр. 45.

вытекает, что  $\langle h_\lambda, s_\mu \rangle = K_{\mu,\lambda} = \langle m_\lambda^*, s_\mu \rangle$ , где  $m_\lambda^*$  — базис, евклидово двойственный к  $m_\lambda$ . Таким образом,  $m_\lambda^* = h_\lambda$ , т. е. базисы  $h_\lambda$  и  $m_\lambda$  двойственны друг другу:

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}. \quad (4-21)$$

Из сл. 4.2 вытекает, что инволюция  $\omega$  является ортогональным оператором.

Предложение 4.2

Многочлены Ньютона  $p_\lambda$  составляют ортогональный базис пространства  $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$  симметрических функций с рациональными коэффициентами и имеют скалярные квадраты  $\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = z_\lambda$ , где<sup>1</sup>  $z_\lambda = \prod_k (m_k! \cdot k^{m_k})$ .

Доказательство. Выразим произведение геометрических прогрессий в правой части тождества Коши (4-13) через функции Ньютона от наборов переменных  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} \sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) &= \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod_j H(y_j) = \prod_j \exp\left(\int_0^{y_j} P(t) dt\right) = \\ &= \exp\left(\sum_j \sum_k \frac{1}{k} p_k(x) y_j^k\right) = \exp\left(\sum_k \frac{p_k(x)p_k(y)}{k}\right) = \prod_k \exp\left(\frac{p_k(x)p_k(y)}{k}\right) = \\ &= \prod_k \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{\ell! \cdot k^\ell} (p_k(x)p_k(y))^\ell = \sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(x)p_\lambda(y) \end{aligned}$$

(последнее равенство объясняется точно также, как в доказательстве предл. 3.4 на стр. 41). Если обозначить через  $C_{\lambda\mu} = \langle s_\lambda, p_\mu \rangle$  коэффициенты разложений Ньютоновских полиномов по базису из полиномов Шура, так что  $p_\mu = \sum_\lambda C_{\lambda\mu} s_\lambda$ , то подставляя эти разложения в правую часть полученного выше равенства и приравнявая коэффициенты при  $s_\lambda(x)s_\eta(y)$  в левой и правой части, получаем соотношения



$$\sum_\nu C_{\nu\lambda} C_{\nu\eta} = \begin{cases} z_\lambda & \text{при } \eta = \lambda \\ 0 & \text{при } \eta \neq \lambda, \end{cases}$$

т. е. матрица Грама  $(\langle p_\lambda, p_\mu \rangle) = C^t \cdot C$  диагональна с диагональными элементами  $z_\lambda$ .  $\square$

<sup>1</sup>Ср. с форм. (3-21) на стр. 41.

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 4.1. Устойчивое паросочетание между  $i$ -м и  $(i + 1)$ -м столбцом устанавливается так: последовательно перебираем шарики в  $(i + 1)$ -ом столбце двигаясь снизу вверх и назначаем очередному шару  $u$  партнёром самый верхний шар  $i$ -го столбца, лежащий строго ниже  $u$  и ещё не назначенный никому партнёром, а если таких шаров нет, объявляем  $u$  свободным. После того, как все шары  $(i + 1)$ -го столбца разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары  $i$ -го столбца, не являющиеся ничьими партнёрами, тоже объявляются свободными. Операция  $L_i$  перемещает на одну клетку влево самый верхний свободный шар  $(i + 1)$ -го столбца или ничего не делает, если свободных шаров в  $(i + 1)$ -ом столбце нет. Операция  $R_i$  перемещает на одну клетку вправо самый нижний свободный шар  $i$ -го столбца или ничего не делает, если в  $i$ -ом столбце нет свободных шаров.

Упр. 4.3. Диаграммы  и  несравнимы по отношению  $\triangleright$ .

Упр. 4.4.  $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)} = s_{(2,1)} + s_{(1,1,1)} = s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$

Упр. 4.5. Для вычисления  $s_\lambda \cdot e_k$  к диаграмме  $\lambda$  надо дописать  $k$  клеток и заполнить их без повторений числами от 1 до  $k$ . Попадание двух таких клеток в одну строку противоречит либо табличному ограничению, либо ограничению Яманучи. Для вычисления  $s_\lambda \cdot h_k$  к диаграмме  $\lambda$  надо дописать  $k$  клеток, заполненных единицами. Попадание двух таких клеток в один столбец противоречит табличному ограничению.