

### Исчисление массивов, таблиц и диаграмм

**A4♦1.** Покажите, что следующие три условия на массив  $a$  попарно эквивалентны:

- а)  $a$  плотен вниз
- б) строчная развёртка массива  $a$  является таблицей Юнга
- в)  $\forall i \in I, j \in J \quad a(1, j + 1) + a(2, j + 1) + \dots + a(i, j + 1) \leq a(1, j) + a(2, j) + \dots + a(i - 1, j)$ .

**A4♦2.** Нарисуйте плотный вниз массив со строчной развёрткой 

1	4	6
2	5	7
3	8	9

 и плотный влево мас-

сив со столбцовой развёрткой<sup>1</sup>

1	2	3
4	5	8
6	7	9

. Какой перестановке из симметрической группы  $S_9$  отвечает по теореме о биекции эта пара массивов?

**A4♦3.** Каким перестановкам  $g \in S_9$  соответствует по теореме о биекции пара таблиц<sup>2</sup>

- а) 

1	2	3	6	7	8	9
4						
5						

 и 

1	4	5	6	7	8	9
2						
3						

 б) 

1	3	5	6
2	4	9	
7	8		

 и 

1	3	5	7
2	4	8	
6	9		

.

**A4♦4.** Покажите, что всякий гомоморфизм<sup>3</sup> между двумя DU-орбитами либо биективен, либо вторая орбита состоит из одной точки.

**A4♦5.** Выпишите явно многочлены Шура а)  $s_{2,1}(x_1, x_2, x_3)$  б)  $s_{3,1}(x_1, x_2, x_3)$  в)  $s_{2,1,1}(x_1, x_2, x_3)$ .

**A4♦6.** Из скольких мономов состоит  $s_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ?

**A4♦7.** Выразите  $\det \begin{pmatrix} x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  через элементарные симметрические многочлены и произведение  $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$ .

**A4♦8 (доминирование).** Для двух диаграмм Юнга  $\lambda$  и  $\mu$  одинакового веса  $|\lambda| = |\mu| = n$  мы пишем<sup>4</sup>  $\lambda \geq \mu$ , если  $\forall j \lambda_1 + \dots + \lambda_j \geq \mu_1 + \dots + \mu_j$ .

- а) Покажите, что доминирование является частичным порядком и приведите пример двух несравнимых диаграмм.
- б) Пусть  $\lambda$  — минимальная по отношению доминирования диаграмма, строго доминирующая диаграмму  $\mu$ . Покажите, что  $\mu$  получается из  $\lambda$  переносом ровно одной клетки в юго-западном направлении на ближайшее возможное расстояние, и в этом случае  $\mu^t \triangleright \lambda^t$ . Выведите отсюда, что для произвольных двух диаграмм  $\lambda \geq \mu \iff \lambda^t \trianglelefteq \mu^t$ .

**A4♦9.** Разрежем диаграмму  $\lambda$  в объединение  $\Gamma$ -образных диаграмм  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  с углами на главной диагонали. Например: 


 = 


 $\cup$ 


 $\cup$ 


, а в общем случае  $k$  равно числу

клеток на главной диагонали диаграммы  $\lambda$  и  $\gamma_i = (\lambda_i - i + 1, 1^{\lambda_i - i})$ . Выясните, с каким коэффициентом входит  $s_\lambda$  в разложение произведения  $s_{\gamma_1} \dots s_{\gamma_k}$  по базису Шура.

**A4♦10\* (инволюция Шютценберже).** Покажите, что центральная симметрия не меняет форму<sup>5</sup> массивов:  $\Phi(a^*) = \Phi(a)$ , где  $a^*(i, j) = a(n + 1 - i, m + 1 - j)$  для  $m \times n$  массива  $a$ .

<sup>1</sup>Напомним, что столбцовая развёртка массива  $a$  — это строчная развёртка транспонированного массива  $a^t$ .

<sup>2</sup>Перестановка  $g \in S_9$  задаёт биективное отображение  $I \rightarrow J$  горизонтальных индексов в вертикальные, массив является графиком этого отображения, первая из таблиц — строчной развёрткой его уплотнения вниз, вторая — столбцовой развёрткой его уплотнения влево.

<sup>3</sup>Т. е. отображение, перестановочное с действием всех операций  $D_j$  и  $U_j$ .

<sup>4</sup>Это отношение называется доминированием.

<sup>5</sup>Напомним, что форма массива это диаграмма Юнга, описывающая его биуплотнение.

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
2			
3а			
б			
4			
5а			
б			
в			
6			
7			
8а			
б			
9			
10			