

§3. Групповая алгебра конечной группы.

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что G — конечная группа, $\mathbb{k}$ — алгебраически замкнутое поле, и $\text{char}(\mathbb{k}) \nmid |G|$.

3.1. Определение и простейшие свойства. Обозначим через $\mathbb{k}G$ векторное пространство с базисом G , состоящее из формальных линейных комбинаций $\sum_{g \in G} c_g g$ элементов группы G с коэффициентами $c_g \in \mathbb{k}$. Групповая операция в G задаёт на $\mathbb{k}G$ структуру ассоциативной $\mathbb{k}$ -алгебры с умножением

$$\left(\sum_g a_g g\right) \left(\sum_h b_h h\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{gh} a_g b_h gh = \sum_f c_f f, \quad \text{где } c_f = \sum_{gh=f} a_g b_h. \quad (3-1)$$

Эта алгебра называется *групповой алгеброй* группы G над полем $\mathbb{k}$. Группа G вложена в алгебру $\mathbb{k}G$ в качестве мультипликативной подгруппы. Всякое линейное представление группы G

$$\varrho : G \rightarrow \text{GL}(V) \quad (3-2)$$

однозначно продолжается по линейности до представления групповой алгебры

$$\tilde{\varrho} : \mathbb{k}G \rightarrow \text{End}(V), \quad (3-3)$$

образ которого является одновременно и линейной, и ассоциативной оболочкой всех операторов из группы G . Наоборот, каждое представление (3-3), будучи ограниченным на подгруппу $G \subset \mathbb{k}G$, задаёт представление (3-2). Поэтому в дальнейшем мы будем обозначать эти представления одной и той же буквой ϱ , считая, что $\varrho_{\sum x_g g} = \sum x_g \varrho_g$.

ПРИМЕР 3.1 (ГРУППОВЫЕ АЛГЕБРЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП)

Групповая алгебра $\mathbb{k}\mathbb{Z}$ бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ изоморфна алгебре $\mathbb{k}[t, t^{-1}]$ полиномов Лорана, а групповая алгебра $\mathbb{k}\mathbb{Z}/(n)$ циклической группы порядка n — алгебре вычетов $\mathbb{k}[t]/(t^n - 1)$. Первый изоморфизм действует на базис из групповых элементов по правилу $m \mapsto t^m$, второй — по правилу $[m]_n \mapsto [t^m]_{t^n-1}$, где в обоих случаях $m \in \mathbb{Z}$.

3.1.1. Проектор на инварианты. Если $\text{char}(\mathbb{k}) \nmid |G|$, то в групповой алгебре $\mathbb{k}G$ имеется оператор усреднения

$$e_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \mathbb{k}G. \quad (3-4)$$

Каждое линейное представление $\varrho : \mathbb{k}G \rightarrow \text{End}(V)$ переводит элемент (3-4) в проектор на подмодуль G -инвариантов¹ $V^G \subset V$ представления ϱ . Обратите внимание, что $ge_1 = e_1 g$ для всех $g \in G$, т. е. элемент (3-4) лежит в центре²

$$Z_{\mathbb{k}G} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{k}G \mid \forall x \in \mathbb{k}G \, zx = xz\} = \{z \in \mathbb{k}G \mid \forall g \in G \, gzg^{-1} = z\}$$

групповой алгебры $\mathbb{k}G$.

¹См. форм. (2-4) на стр. 15.

²Напомним, что *центром* кольца K называется множество всех элементов, коммутирующих со всеми элементами K .

3.1.2. Центр групповой алгебры представляет собой коммутативную подалгебру в $\mathbb{k}G$, состоящую из всех таких линейных комбинаций $z = \sum_h z_h h$, что $z_{g^{-1}hg} = z_h$ для всех $g, h \in G$. Иными словами, элемент z централен, если и только если его коэффициенты z_h постоянны на классах сопряжённости. Мы заключаем, что элементы

$$z_C = \sum_{h \in C} h, \quad (3-5)$$

где C пробегает множество Cl_G классов сопряжённости группы G , образуют базис векторного пространства $Z_{\mathbb{k}G}$ над $\mathbb{k}$, и $\dim_{\mathbb{k}} Z_{\mathbb{k}G} = |\text{Cl}_G|$. Мы будем называть это число *числом классов*.

Каждое линейное представление $\mathbb{k}G \rightarrow \text{End}(V)$ переводит все центральные элементы групповой алгебры в эндоморфизмы пространства V , перестановочные со всеми операторами из группы G . Из теоремы Бернсайда¹ вытекает, что в любом неприводимом представлении над алгебраически замкнутым полем все центральные элементы действуют умножениями на скаляры.

3.2. Изотипное разложение регулярного представления. Зафиксируем в каждом классе изоморфных неприводимых представлений группы G какого-нибудь представителя $\lambda : G \rightarrow \text{GL}(U_\lambda)$ и обозначим множество всех таких представителей через $\text{Ir}(G)$. Согласно [теор. 2.1](#) на стр. 16 и [предл. 1.3](#) на стр. 10 всякий конечномерный G -модуль V обладает *изотипным разложением*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Ir}(G)} V_\lambda, \quad (3-6)$$

каждая компонента V_λ которого является суммой всех простых подмодулей в V , изоморфных данному $U_\lambda \in \text{Ir}(G)$. Рассмотрим *левое регулярное представление* группы G в $\mathbb{k}G$ по правилу $g : x \mapsto gx$ и обозначим через $I_\lambda \subset \mathbb{k}G$ его λ -изотипную компоненту. Таким образом,

$$\mathbb{k}G = \bigoplus_{\lambda \in \text{Ir}(G)} I_\lambda. \quad (3-7)$$

Будучи G -подмодулем левого регулярного представления, изотипная компонента I_λ является левым идеалом алгебры $\mathbb{k}G$. Так как правое умножение $h : \mathbb{k}G \rightarrow \mathbb{k}G, x \mapsto xh$, на любой элемент $h \in G$ перестановочно с левым действием G на $\mathbb{k}G$, каждая изотипная компонента левого регулярного представления по [предл. 1.2](#) на стр. 10 переводится в себя правым умножением на любой элемент группы. Поэтому каждая изотипная компонента I_λ является двусторонним идеалом алгебры $\mathbb{k}G$. Так как $I_\lambda \cap I_\varrho = 0$ при $\lambda \neq \varrho$, и $I_\lambda I_\varrho \subset I_\lambda \cap I_\varrho$, мы заключаем, что

$$I_\lambda I_\varrho = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq \varrho. \quad (3-8)$$

Обозначим через $e_\lambda \in I_\lambda$ компоненту единичного элемента $e \in G$ в разложении (3-7), так что

$$e = \sum_{\lambda \in \text{Ir}(G)} e_\lambda, \quad \text{где} \quad e_\lambda \in I_\lambda. \quad (3-9)$$

Из (3-8) вытекает, что для каждого $x_\lambda \in I_\lambda$ выполняются соотношения $x_\lambda e_\mu = e_\mu x_\lambda = 0$ при $\lambda \neq \mu$, а также $x_\lambda e_\lambda = x_\lambda e = x_\lambda$ и $e_\lambda x_\lambda = e x_\lambda = x_\lambda$. В частности, $e_\lambda^2 = e_\lambda$ и $e_\lambda e_\varrho = 0$, когда $\varrho \neq \lambda$. Элементы e_λ называются *изотипными проекторами* (или *неприводимыми идемпотентами*) групповой алгебры $\mathbb{k}G$. Записывая произвольный $x \in \mathbb{k}G$ как $x = \sum_{\lambda \in \text{Ir}(G)} x_\lambda$, где $x_\lambda \in I_\lambda$, мы видим, что $x e_\lambda = x_\lambda = e_\lambda x$. Таким образом, все изотипные проекторы e_λ лежат в центре групповой алгебры, а каждая изотипная компонента $I_\lambda = (e_\lambda)$ является главным двусторонним идеалом, порождённым e_λ .

¹См. [сл. 1.5](#) на стр. 10.

Лемма 3.1

Любое линейное представление $\varrho : \mathbb{k}G \rightarrow \text{End}(V)$ с нулевой λ -изотипной компонентой переводит изотипный идеал $I_\lambda \subset \mathbb{k}G$ в нуль.

Доказательство. Поскольку I_λ является левым идеалом в $\mathbb{k}G$, для любого вектора $v \in V$ подпространство $I_\lambda v = \{fv \mid f \in I_\lambda\}$ является G -подмодулем в V , и правило $f \mapsto fv$ задаёт сюръективный гомоморфизм G -модулей $I_\lambda \twoheadrightarrow I_\lambda v$. Поскольку такой гомоморфизм переводит λ -изотипный подмодуль в λ -изотипный, подмодуль $I_\lambda v$ содержится в изотипной компоненте V_λ представления V . Если она нулевая, то $I_\lambda v = 0$ для всех $v \in V$. $\square$

Теорема 3.1 (теорема Машке)

Над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ гомоморфизм алгебр

$$\text{rep} : \mathbb{k}G \rightarrow \prod_{\lambda \in \text{Ir}(G)} \text{End}(U_\lambda), \quad (3-10)$$

переводящий элемент $f \in \mathbb{k}G$ в набор операторов $\lambda_f : U_\lambda \rightarrow U_\lambda$, которыми он действует во всех неприводимых представлениях группы G , является изоморфизмом алгебр. Ограничение гомоморфизма (3-10) на изотипный идеал $I_\lambda \subset \mathbb{k}G$ задаёт изоморфизм алгебр $I_\lambda \xrightarrow{\sim} \text{End}(U_\lambda)$.

Доказательство. Сначала установим инъективность гомоморфизма rep . Если элемент $h \in \mathbb{k}G$ действует нулевым оператором во всех неприводимых представлениях, то он действует нулевым оператором вообще на любом конечномерном G -модуле, в частности — в левом регулярном представлении. Но $f \cdot 1 = 0$ влечёт $f = 0$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что по лем. 3.1 каждое неприводимое представление $\lambda : \mathbb{k}G \rightarrow \text{End}(U_\lambda)$ отображает в нуль все прямые слагаемые разложения (3-7) за исключением I_λ . Однако по теореме Бернсайда¹ оно эпиморфно. Поэтому ограничение $\text{rep}|_{I_\lambda} = \lambda|_{I_\lambda} : I_\lambda \xrightarrow{\sim} \text{End}(U_\lambda)$ является изоморфизмом. В частности, неприводимых представлений U_λ имеется лишь конечное число. Для доказательства сюръективности гомоморфизма rep остаётся заметить, что по уже доказанному для любого набора операторов $\varphi_\lambda \in \text{End}(U_\lambda)$ найдутся такие элементы $f_\lambda \in I_\lambda$, что $\lambda(f_\lambda) = \varphi_\lambda$. Поскольку $\varrho(f_\lambda) = 0$ для всех неприводимых $\varrho \neq \lambda$, мы заключаем, что $\text{rep}(\sum_\lambda f_\lambda) = \prod_\lambda \varphi_\lambda$. $\square$

Следствие 3.1

Число неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ характеристики $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$ конечно и равно числу классов сопряжённости $|\text{Cl}_G|$ группы G , а сумма квадратов их размерностей равна $|G|$. При этом каждый неприводимый G -модуль U_λ входит в левое регулярное представление с кратностью $m_\lambda(\mathbb{k}G) = \dim U_\lambda$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что число классов сопряжённости равно размерности центра групповой алгебры, который переводится изоморфизмом (3-10) в центр прямого произведения матричных алгебр, равный прямому произведению их центров, а центр каждой матричной алгебры состоит из скалярных диагональных матриц. Поэтому размерность прямого произведения центров равна количеству сомножителей. Второе утверждение выражает равенство размерностей правого и левого пространств в (3-10). Наконец, каждый неприводимый G -модуль U_λ входит в изотипную компоненту $I_\lambda \simeq \text{End}(U_\lambda)$ с кратностью $m_\lambda(\mathbb{k}G) = \dim \text{End}(U_\lambda) / \dim U_\lambda = \dim U_\lambda$. $\square$

¹См. сл. 1.5 на стр. 10.

Следствие 3.2

Неприводимые идемпотенты $e_\lambda \in I_\lambda$ из форм. (3-9) на стр. 24 образуют базис в центре групповой алгебры и действуют тождественным оператором в неприводимом представлении λ и нулевым оператором во всех остальных неприводимых представлениях. Произвольное линейное представление $\mathbb{k}G \rightarrow \text{End}(V)$ переводит e_λ в G -инвариантный проектор на λ -изотипную компоненту $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Так как $x_\lambda e_\lambda = e_\lambda x_\lambda = x_\lambda$ для всех $x_\lambda \in I_\lambda$, изоморфизм

$$\text{rep}|_{I_\lambda} = \lambda|_{I_\lambda} : I_\lambda \xrightarrow{\sim} \text{End}(U_\lambda)$$

переводит e_λ в единицу Id_{U_λ} алгебры $\text{End}(U_\lambda)$. Все остальные неприводимые представления переводят $e_\lambda \in I_\lambda$ в нуль по лем. 3.1 на стр. 25. Это доказывает второе и третье утверждения. Первое утверждение вытекает из второго по теор. 3.1, ибо центр прямой суммы $\bigoplus \text{End}(U_\lambda)$ состоит из наборов скалярных операторов $c_\lambda \text{Id}_{U_\lambda}$, где $c_\lambda \in \mathbb{k}$, и операторы $\text{rep}(e_\lambda)$ образуют базис этого пространства. $\square$

Пример 3.2 (простенькие представления симметрических групп)

Поскольку сопоставление перестановке $g \in S_n$ её циклового типа устанавливает биекцию между классами сопряжённых элементов в S_n и n -клеточными диаграммами Юнга¹, неприводимые представления симметрической группы S_n биективно соответствуют диаграммам Юнга из n клеток. Каждая симметрическая группа S_n имеет два одномерных представления: тривиальное и *знаковое*, в котором каждая перестановка g действует умножением на знак $\text{sgn}(g)$. Если $\text{char } \mathbb{k} > n$, операторы симметризации и альтернирования

$$\text{sym}_n = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} g \quad \text{и} \quad \text{alt}_n = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) g$$

являются S_n -инвариантными проекторами на тривиальную и знаковую изотипные компоненты любого S_n -модуля.

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Убедитесь в этом.

Тавтологическое n -мерное представление группы S_n перестановками стандартных базисных векторов e_i пространства $\mathbb{k}^n$ имеет тривиальный одномерный подмодуль, порождённый суммой $e = e_1 + \dots + e_n$ всех базисных векторов. Индуцированное $(n-1)$ -мерное представление в факторпространстве $\mathbb{k}^n / \mathbb{k}e$ называется *симплициальным*², поскольку над полем $\mathbb{R}$ его образ представляет собою полную группу правильного $(n-1)$ -мерного симплекса в $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n / \mathbb{R} \cdot e$ с центром в нуле и вершинами в классах векторов e_i по модулю e .

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Покажите, что при $\text{char } \mathbb{k} \nmid n$ симплициальное представление неприводимо. Неприводимые представления группы S_3 , имеющей ровно три класса сопряжённости, исчерпываются тривиальным и знаковым одномерными представлениями и двумерным представлением U_Δ группой треугольника в силу равенства $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$. Инвариантный проектор на U_Δ -изотипную компоненту любого представления задаётся оператором

$$\pi_\Delta \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \text{sym}_3 - \text{alt}_3 = 1 - \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} (1 + \text{sgn}(g))g = 1 - \frac{1}{3} (1 + \tau + \tau^2),$$

¹См. пример 10.15 на с. 181 лекций [Алг 1].

²При $n = 2$ оно совпадает со знаковым.

где $\tau = |123\rangle \in S_3$ это цикл длины 3.

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Проверьте прямым вычислением в групповой алгебре, что π_Δ идемпотентен и лежит в центре, аннулирует тривиальный и знаковый модули, и тождественно действует в представлении группой треугольника.

У группы S_4 , имеющей 5 классов сопряжённости, кроме одномерного тривиального, одномерного знакового и трёхмерного симплициального¹ представления несобственной группой тетраэдра² имеется ещё одно трёхмерное представление собственной группой куба³, а также двумерное представление группой треугольника, возникающее из факторизации⁴ $S_4 \rightarrow S_3$ по подгруппе Клейна $V_4 \subset S_4$. Равенство $2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3^2 + 2^2 = 24$ указывает на то, что это хорошие кандидаты на полный список всех неприводимых представлений.

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Покажите, что два трёхмерных представления неприводимы, не изоморфны и получаются друг из друга тензорным умножением на знаковое представление.

3.3. Каноническое скалярное произведение. Левое регулярное представление

$$L : \mathbb{K}G \hookrightarrow \text{End}(\mathbb{K}G),$$

в котором каждый элемент $f \in \mathbb{K}G$ действует левым умножением $x \mapsto fx$, вкладывает алгебру $\mathbb{K}G$ в алгебру всех $\mathbb{K}$ -линейных эндоморфизмов векторного пространства $\mathbb{K}G$. На алгебре эндоморфизмов имеется каноническая симметричная билинейная форма — след композиции.

УПРАЖНЕНИЕ 3.5. Убедитесь, что для конечномерного векторного пространства V билинейная форма $\text{End}(V) \times \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{K}$, $(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$, принимает на паре разложимых операторов⁵ $A = \alpha \otimes a$ и $B = \beta \otimes b$, где $a, b \in V$, $\alpha, \beta \in V^*$, значение $\alpha(b) \cdot \beta(a)$, равное их полной свёртке⁶, и выведите отсюда, что эта форма симметрична и невырождена.

Ограничение следа композиции на образ $L(\mathbb{K}G) \subset \text{End}(\mathbb{K}G)$ левого регулярного представления задаёт на $\mathbb{K}G$ симметричное скалярное произведение

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(L_f L_g) = \text{tr}(L_{fg}). \quad (3-11)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.6. Покажите, что левое и правое умножение на заданный элемент сопряжены друг другу относительно скалярного произведения: $(fg, h) = (f, gh)$ и выведите отсюда, что ортогональное дополнение к любому левому идеалу в $\mathbb{K}G$ является правым идеалом, а ортогональное дополнение к правому — левым⁷.

Так как след левого умножения на единицу группы равен $|G|$, а умножение на любой другой элемент группы бесследно, скалярные произведения элементов группы задаются формулой

$$(g, h) = \begin{cases} |G| & \text{при } h = g^{-1} \\ 0 & \text{при } h \neq g^{-1}. \end{cases} \quad (3-12)$$

¹См. прим. 2.1 на стр. 13.

²См. пример 10.4 на с. 172 лекций [Алг 1].

³См. пример 10.10 на с. 177 лекций [Алг 1].

⁴См. пример 10.9 на с. 176 лекций [Алг 1].

⁵См. пример 13.3 на с. 214 лекций [Алг 1].

⁶См. раздел 14.1 на с. 222 лекций [Алг 1].

⁷Тем самым, ортогональное дополнение к любому двустороннему идеалу тоже двусторонний идеал.

Таким образом, скалярное произведение невырождено¹, и двойственным базисом к базису из групповых элементов g является базис из элементов $g^\times = g^{-1}/|G|$. В частности, каждый элемент $z \in \mathbb{K}G$ разлагается по базису из групповых элементов в виде

$$z = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g^{-1}, z) \cdot g \quad (3-13)$$

Изоморфизм $\text{ger} : \mathbb{K}G \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in \text{Ir}(G)} \text{End}(U_\lambda)$ из теоремы Машке² позволяет выразить скалярное произведение (3-11) через следы действий в неприводимых представлениях.

Предложение 3.1 (Формула Планшереля)

Для всех $f, g \in \mathbb{K}G$ выполняется равенство $(f, g) = \sum_{\lambda \in \text{Ir}(G)} \dim(U_\lambda) \cdot \text{tr}(\lambda_{fg})$.

Доказательство. Вычислим $\text{tr}(L_{fg})$ в алгебре $\bigoplus_{\lambda \in \text{Ir}(G)} \text{End}(U_\lambda)$. Он равен сумме следов левого умножения на λ_{fg} в $\text{End}(U_\lambda)$ по всем неприводимым представлениям λ . След левого умножения на матрицу M в матричной алгебре $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$ равен $n \cdot \text{tr}(M)$, поскольку каждая матричная единица E_{ij} входит в ME_{ij} с коэффициентом m_{ii} . $\square$

Следствие 3.3

Базисные идемпотенты составляют ортогональный базис центра групповой алгебры и имеют скалярные квадраты $(e_\lambda, e_\lambda) = \dim^2 U_\lambda$. $\square$

Следствие 3.4

Разложение $\mathbb{K}G = \bigoplus_{\lambda \in \text{Ir}(G)} I_\lambda$ левого регулярного представления в прямую сумму изотипных подмодулей является *ортогональным* разложением, и неприводимые идемпотенты являются *ортогональными проекциями*³ единицы $e \in \mathbb{K}G$ на изотипные подпространства I_λ .

Следствие 3.5

Базисный идемпотент e_λ выражается через элементы группы по формуле

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\lambda_{g^{-1}}) \cdot g, \quad (3-14)$$

и каждое представление $\mathbb{K}G \rightarrow \text{End}(V)$ переводит правую часть этого равенства в G -инвариантный проектор на λ -изотипный подмодуль $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Комбинируя форм. (3-13) на стр. 28 с формулой Планшереля, получаем

$$\begin{aligned} e_\lambda &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} (g^{-1}, e_\lambda) \cdot g = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \sum_{\mu \in \text{Ir}(G)} \dim(U_\mu) \cdot \text{tr}(\mu(g^{-1}e_\lambda)) \cdot g = \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \sum_{\mu \in \text{Ir}(G)} \dim(U_\mu) \cdot \text{tr}(\mu(g^{-1})\mu(e_\lambda)) \cdot g = \frac{\dim(U_\lambda)}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\lambda(g^{-1})) \cdot g \end{aligned}$$

(в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\mu(e_\lambda) = 0$ при $\mu \neq \lambda$, а $\lambda(e_\lambda) = \text{Id}_{U_\lambda}$ по сл. 3.2 на стр. 26). $\square$

¹ Отметим, что если характеристика поля делит порядок группы, то это не так.

² См. теор. 3.1 на стр. 25.

³ См. раздел 10.4 на с. 137 лекций [Гео 1].

3.4. Характеры. Линейная форма на $\mathbb{k}G$, сопоставляющая элементу групповой алгебры след его действия на пространстве V линейного представления $\varrho : G \rightarrow GL(V)$ называется *характером*¹ представления ϱ и обозначается

$$\chi_{\varrho} : \mathbb{k}G \rightarrow \mathbb{k}, \quad \chi_{\varrho}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr } \varrho_f. \quad (3-15)$$

Так как след оператора не меняется при сопряжении, характер любого представления постоянен на классах сопряжённых элементов, и изоморфные представления имеют равные характеры. Формула (3-14) для проектора на λ -изотипную компоненту переписывается в терминах характеров как

$$e_{\lambda} = \frac{\dim U_{\lambda}}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\lambda}(g^{-1}) \cdot g, \quad (3-16)$$

ПРИМЕР 3.3 (ХАРАКТЕРЫ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ)

Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g . В частности, характер регулярного представления имеет вид

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & \text{если } g = e \\ 0 & \text{если } g \neq e. \end{cases}$$

Значение характера тавтологического представления симметрической группы S_n перестановками базисных векторов координатного пространства $\mathbb{k}^n$ на перестановке циклового типа λ равно $m_1(\lambda)$, т. е. числу строк длины 1 в диаграмме λ . Поскольку это представление является прямой суммой тривиального одномерного, с тождественно единичным характером, и симплициального, мы заключаем, что значение симплициального характера группы S_n на классе сопряжённости C_{λ} , состоящем из перестановок циклового типа λ , равно $\chi_{\Delta}(C_{\lambda}) = m_1(\lambda) - 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.7. Убедитесь, что характеры неприводимых представлений симметрической группы S_3 задаются таблицей

классы			
число элементов	1	3	2
значения характеров:			
тривиального	1	1	1
знакового	1	-1	1
треугольного	2	0	-1

(3-17)

и что проекторы на изотипные компоненты, вычисленные при помощи этой таблицы по формуле (3-16), совпадают с описанными ранее в [прим. 3.2](#) на стр. 26.

¹Не следует путать эти *аддитивные* характеры с мультипликативными характерами абелевых групп, обсуждавшимися в [п° 2.4](#) на стр. 20. Только характеры одномерных представлений являются мультипликативными гомоморфизмами.

ПРИМЕР 3.4 (неприводимые характеры S_4)

В геометрически заданных представлениях следы можно вычислять складывая собственные значения соответствующих поворотов и отражений. Например, значения характеров пяти представлений симметрической группы S_4 из [прим. 3.2](#) задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	-1	1	1	-1
тетраэдрального	3	1	-1	0	-1
кубического	3	-1	-1	0	1
треугольного	2	0	2	-1	0

(3-18)

четвёртая строка которой объясняется так: след единицы равен размерности представления; одна транспозиция и пара независимых транспозиций действуют поворотами на 180° вокруг прямой, и собственные числа такого вращения суть 1, -1 и -1 ; цикл длины 3 и цикл длины 4 действуют поворотами на 120° и 90° соответственно, и их собственные числа суть 1, ω , ω^2 и 1, i , $-i$.

ЛЕММА 3.2

Для любых двух представлений V , W группы G с характерами χ_V и χ_W

$$\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g) \quad (3-19)$$

$$\chi_{V \otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g) \quad (3-20)$$

$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) \quad (3-21)$$

$$\chi_{\text{Hom}(V, W)}(g) = \chi_V(g^{-1})\chi_W(g) \quad (3-22)$$

Доказательство. Поскольку любой оператор g из конечной группы полупрост, в пространствах V и W имеются базисы $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ из собственных векторов g . Пусть α_i и β_j — соответствующие наборы собственных чисел. Набор собственных чисел g в представлении $V \oplus W$ получается объединением этих наборов, откуда следует (3-19). Собственными числами g в представлении $V \otimes W$ являются всевозможные попарные произведения $\alpha_i\beta_j$, что даёт (3-20). Формула (3-21) следует из того, что матрица g в двойственном представлении транспонирована к матрице g^{-1} в исходном (см. [н° 2.1](#)). Последняя формула следует из двух предыдущих. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Докажите, что производящие функции для характеров симметрических и внешних степеней представления $\varrho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ имеют вид:

$$\sum_{v \geq 0} \chi_{\Lambda^v V}(g) t^v = \det(1 + t \varrho(g)) \quad \text{и} \quad \sum_{v \geq 0} \chi_{S^v V}(g) t^v = \det(1 - t \varrho(g))^{-1}.$$

Следствие 3.6

Характер любого представления V выражается через неприводимые характеры χ_λ как

$$\chi_V = \sum_{\lambda \in \text{Ir}(G)} m_\lambda(V) \cdot \chi_\lambda \quad (3-23)$$

где $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda$ обозначает кратность простого G -модуля U_λ в V . $\square$

3.5. Преобразование Фурье и алгебра функций на группе. Так как любая линейная форма на векторном пространстве однозначно задаётся своими значениями на базисных векторах, пространство $\mathbb{k}^G$ функций $G \rightarrow \mathbb{k}$ двойственно пространству $\mathbb{k}G$: каждая функция $\varphi : G \rightarrow \mathbb{k}$ задаёт линейную форму $\varphi(\sum x_g \cdot g) = \sum x_g \varphi(g)$, $\mathbb{k}$ -линейно продолжаящую φ с G на $\mathbb{k}G$. С другой стороны, скалярное произведение¹ на $\mathbb{k}G$ задаёт невырожденную корреляцию²

$$\mathbb{k}G \simeq \mathbb{k}G^*, \quad f \mapsto (f, *), \quad (3-24)$$

которая сопоставляет каждому вектору $f \in \mathbb{k}G$ линейную форму $\mathbb{k}G \rightarrow \mathbb{k}$, задаваемую скалярным умножением на этот вектор. Согласно формулам (3-12) и (3-13) на стр. 28 изоморфизм (3-24) переводит элементы $g^\times = g^{-1}/|G| \in \mathbb{k}G$ в базис векторного пространства $\mathbb{k}G^*$, двойственный к состоящему из элементов группы базису в $\mathbb{k}G$. Комбинируя обратный к (3-24) изоморфизм $\mathbb{k}G^* \simeq \mathbb{k}G$ с описанным выше отождествлением $\mathbb{k}^G \simeq \mathbb{k}G^*$, получаем изоморфизм векторных пространств

$$\Phi : \mathbb{k}^G \simeq \mathbb{k}G, \quad \varphi \mapsto \hat{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \cdot g, \quad (3-25)$$

который называется *преобразованием Фурье*. Исходная функция $\varphi : G \rightarrow \mathbb{k}$ восстанавливается по своему Фурье-образу $\hat{\varphi} \in \mathbb{k}G$ по формуле обращения:

$$\varphi(g) = (g, \hat{\varphi}) = \sum_{\varrho \in \text{Ir } G} \dim U_\varrho \cdot \chi_\varrho(g \hat{\varphi}), \quad (3-26)$$

где в средней части стоит каноническое скалярное произведение в $\mathbb{k}G$, а справа — результат его вычисления по формуле Планшереля из предл. 3.1 на стр. 28 (суммирование идёт по всем неприводимым представлениям $\varrho : G \rightarrow \text{GL}(U_\varrho)$).

УПРАЖНЕНИЕ 3.9. Покажите, что (некоммутативное) умножение в групповой алгебре $\mathbb{k}G$ переводится изоморфизмом, обратным к (3-25) в операцию *свёртки*, сопоставляющую функциям $\varphi, \psi \in \mathbb{k}^G$ функцию $\varphi * \psi : G \rightarrow \mathbb{k}, g \mapsto |G|^{-1} \sum_{st=g} \varphi(s)\psi(t)$.

По форм. (3-16) на стр. 29 преобразование Фурье переводит неприводимые характеры в кратности неприводимых идемпотентов:

$$\hat{\chi}_\lambda = e_\lambda / \dim U_\lambda. \quad (3-27)$$

Перенесём с помощью изоморфизма (3-25) скалярное произведение из $\mathbb{k}G$ в пространство функций на группе, т. е. положим

$$(\varphi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} \varphi(g^{-1})\psi(h^{-1})(g, h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1})\psi(g). \quad (3-28)$$

Из формулы (3-27) и сл. 3.3 на стр. 28 немедленно вытекают следующие результаты, полностью сводящие определение кратностей вхождения неприводимых G -модулей в данное представление к формальным линейным вычислениям с характерами.

Следствие 3.7

Неприводимые характеры образуют ортонормальный базис в пространстве функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. $\square$

¹См. форм. (3-11) на стр. 27.

²См. раздел 13.1.2 на с. 172 лекций [Гео 1].

Следствие 3.8

$\dim \text{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$ для всех G -модулей V и W .

Доказательство. Обе части равны $\sum_{\lambda \in \text{Irr}(G)} m_\lambda(V) m_\lambda(W)$: левая — по сл. 1.6 на стр. 11, правая — в силу сл. 3.6 и ортонормальности характеров. $\square$

Следствие 3.9

Кратность вхождения неприводимого представления U_λ в произвольное представление V равна скалярному произведению их характеров: $m_\lambda(V) = (\chi_\lambda, \chi_V)$.

Доказательство. Скалярно умножаем обе части (3-23) на χ_λ и пользуемся ортонормальностью характеров. $\square$

Следствие 3.10

Два представления изоморфны, если и только если у них одинаковые характеры.

Доказательство. По предыдущему следствию размерности изотипных компонент любого представления однозначно определяются его характером. $\square$

Следствие 3.11

Представление V неприводимо тогда и только тогда, когда $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

Доказательство. В силу ортонормальности неприводимых характеров из сл. 3.6 вытекает, что $(\chi_V, \chi_V) = \sum_{\lambda \in \text{Irr}(G)} m_\lambda^2(V)$, где все $m_\lambda(V)$ целые неотрицательные. Такая сумма равна единице только если она состоит из одного слагаемого, равного единице. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3.10. Опишите все неприводимые представления групп A_5 и S_5 и вычислите их характеры.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. (СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ХАРАКТЕРОВ) Так как собственные числа всех операторов из конечной группы G являются корнями $|G|$ -й степени из единицы, в любом представлении группы G над полем $\mathbb{C}$ следы обратных друг другу элементов g и g^{-1} комплексно сопряжены. Поэтому $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ для любого характера χ . Это позволяет переписать скалярное произведение комплексных характеров в виде стандартной эрмитовой структуры:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \cdot \chi_2(g).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. (СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ХАРАКТЕРОВ ГРУППЫ S_n) Обратные друг другу перестановки $g, g^{-1} \in S_n$ имеют одинаковый цикловой тип и, стало быть, сопряжены в S_n . Поэтому $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$ для любого характера χ . Это позволяет переписать скалярное произведение характеров симметрической группы S_n в виде стандартной евклидовой структуры:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \chi_1(g) \cdot \chi_2(g).$$

В частности, над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ оно положительно определено.

Пример 3.5 (внешние степени симплициального представления S_n)

Покажем, что все внешние степени $(n - 1)$ -мерного симплициального¹ представления Δ_{n-1} симметрической группы S_n неприводимы. Разложение тавтологического представления τ группы S_n перестановками базисных векторов в $\mathbb{k}^n$ на неприводимые имеет вид $\tau = \mathbb{1} \oplus \Delta_{n-1}$. Поэтому его m -тая внешняя степень $\Lambda^m \tau \simeq \Lambda^m \Delta_{n-1} \oplus \Lambda^{m-1} \Delta_{n-1}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.11. Покажите, что $\Lambda^m(U \oplus W) \simeq \bigoplus_{\alpha+\beta=m} \Lambda^\alpha U \otimes \Lambda^\beta W$.

Достаточно убедиться, что скалярный квадрат $(\chi_{\Lambda^m \tau}, \chi_{\Lambda^m \tau}) = 2$. В стандартном базисе

$$e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}, \text{ где } i_1 < \dots < i_m,$$

пространства $\Lambda^m(\mathbb{k}^n)$ след перестановки σ равен сумме знаков $\text{sgn } \sigma|_I$ ограничений перестановки σ на все такие подмножества I , что $\sigma(I) \subset I$. Поэтому

$$\begin{aligned} (\chi_{\Lambda^m \tau}, \chi_{\Lambda^m \tau}) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{I: \sigma(I) \subset I} \text{sgn}(\sigma|_I) \right) \cdot \left(\sum_{J: \sigma(J) \subset J} \text{sgn}(\sigma|_J) \right) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{I, J: \substack{\sigma(I) \subset I \\ \sigma(J) \subset J}} \text{sgn}(\sigma|_I) \cdot \text{sgn}(\sigma|_J) = \frac{1}{n!} \sum_{I, J} \sum_{\sigma: \substack{\sigma(I) \subset I \\ \sigma(J) \subset J}} \text{sgn}(\sigma|_I) \cdot \text{sgn}(\sigma|_J). \end{aligned}$$

Совокупность всех таких перестановок σ , что $\sigma(I) \subset I$ и $\sigma(J) \subset J$, распадается в прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I \cap J$, $I \setminus (I \cap J)$, $J \setminus (I \cap J)$, $\{1, 2, \dots, n\} \setminus (I \cup J)$, и изоморфное $S_k \times S_{m-k} \times S_{m-k} \times S_{n-2m+k}$, где $k = |I \cap J|$. Поскольку $\text{sgn}(\sigma|_I) \cdot \text{sgn}(\sigma|_J) = \text{sgn}(\sigma|_{I \cap J})^2 \cdot \text{sgn}(\sigma|_{I \setminus (I \cap J)}) \cdot \text{sgn}(\sigma|_{J \setminus (I \cap J)}) = \text{sgn}(\sigma|_{I \setminus (I \cap J)}) \cdot \text{sgn}(\sigma|_{J \setminus (I \cap J)})$, предыдущую сумму можно переписать как

$$\frac{1}{n!} \sum_k k! \cdot (n - 2m + k)! \sum_{I, J: |I \cap J| = k} \left(\sum_{g \in S_{m-k}} \text{sgn}(g) \right) \cdot \left(\sum_{h \in S_{m-k}} \text{sgn}(h) \right). \quad (3-29)$$

Последние два множителя отличны от нуля только при $k = m$ и $k = m - 1$, когда они превращаются в единицы. Проверим, что вклад каждого из этих двух слагаемых в сумму (3-29) равен единице. Если $k = m$, то $I = J$ и соответствующее слагаемое равно

$$\frac{m!(n - m)!}{n!} \sum_I 1 = \binom{n}{m}^{-1} \binom{n}{m} = 1.$$

Если $k = m - 1$, то $|I \cap J| = (m - 1)$ и соответствующее слагаемое равно

$$\begin{aligned} \frac{(m - 1)!(n - m - 1)!}{n!} \sum_{I \cap J} \sum_{i \neq j: i, j \notin I \cap J} 1 &= \\ &= \frac{(m - 1)!(n - m - 1)!}{n!} \cdot \binom{n}{m - 1} \cdot (n - m + 1)(n - m) = 1. \end{aligned}$$

¹См. прим. 2.1 на стр. 13.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.2. Каждый класс $[v]_e \in \mathbb{K}^n / \mathbb{R} \cdot e$ однозначно записывается в виде $[v] = \sum_{i=1}^n x_i [e_i]$, где $x_i \in \mathbb{K}$ имеют $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Если $[v]_e \neq 0$ и $\text{char } \mathbb{K} \nmid n$, то $x_i \neq x_j$ для каких-нибудь $i \neq j$, и $[v] - \sigma_{ij}[v] = \lambda[e_i - e_j]$ с $\lambda \neq 0$. Очевидно, что S_n -орбита такого вектора линейно порождает $\mathbb{K}^n$.

Упр. 3.4. Диагонали двумерных граней куба являются рёбрами двух центрально симметричных тетраэдров. Движения куба, осуществляющие чётную перестановку диагоналей, переводят каждый из этих двух тетраэдров в себя, осуществляя чётные перестановки их вершин. Каждое движение куба, осуществляющее нечётную перестановку его диагоналей, переводит тетраэдры друг в друга. Тензорное произведение такого движения со знаковым представлением есть ни что иное, как его композиция с центральной симметрией. Такая композиция переводит каждый из двух тетраэдров в себя и осуществляет нечётную перестановку их вершин.

Упр. 3.8. Поскольку каждый оператор $g \in G$ диагонализуем, в V существует базис $e_1, \dots, e_d$ из собственных векторов оператора g . Обозначим их собственные числа через $x_1, \dots, x_n$. Тогда базисы из мономов $e_1^{m_1} \dots e_d^{m_d}$ и грассмановых мономов $e_1 \wedge \dots \wedge e_i$, n в пространствах $S^n V$ и $\Lambda^n V$ будут собственными для операторов $S^n g$ и $\Lambda^n g$ соответственно, и их собственными числами будут всевозможные мономы $x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$ с $m_1 + \dots + m_d = n$ и всевозможные полилинейные мономы $x_{i_1} \dots x_{i_n}$, откуда $\text{tr } S^n g = h_n(x_1, \dots, x_d)$ и $\text{tr } \Lambda^n g = e_n(x_1, \dots, x_d)$. С другой стороны, $\det(1 + tg) = \prod_i (1 + tx_i) = E(t)$ и $\det(1 - tg)^{-1} = 1/E(-t) = H(t)$ суть производящие функции для многочленов e_n и h_n .

Упр. 3.9. Произведение $\hat{\varphi}\hat{\psi} = |G|^{-2} \sum_g \sum_{st=g} \varphi(s)\psi(t) \cdot g$ является Фурье-образом функции $g \mapsto (g, \hat{\varphi}\hat{\psi}) = |G|^{-1} \sum_{st=g} \varphi(s)\psi(t)$.

Упр. 3.10. Группа A_5 имеет два трёхмерных неприводимых представления вращениями икосаэдра¹ и четырёхмерное представление вращениями симплекса. Полная таблица неприводимых характеров A_5 такова:

классы				(12345)	(21345)
число элементов	1	20	15	12	12
значения характеров:					
тривиальный	1	1	1	1	1
икосаэдр-1	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
икосаэдр-2	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
симплициальный	4	1	0	-1	-1
пятимерный	5	-1	1	0	0

Группа S_5 имеет тривиальное и знаковое одномерные представления $\mathbb{1}$ и sgn , а также 4-мерное симплициальное представление Δ . Представления $\text{sgn} \otimes \Delta$ и $\Lambda^2 \Delta$ тоже неприводимы, а вот $S^2 \Delta =$

¹Они получаются друг из друга композицией с внешним автоморфизмом группы A_5 , который задаётся сопряжением любой нечётной перестановкой внутри S_5 .

$= \mathbb{1} \oplus \Delta \oplus \zeta$, где ζ — неприводимое 5-мерное представление¹. Ответ:

классы							
число элементов	1	10	30	20	15	20	24
значения характеров:							
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	-1	1	1	-1	1
Δ	4	2	0	1	0	-1	-1
$\Delta \otimes \text{sgn}$	4	-2	0	1	0	1	-1
$\Lambda^2 \Delta$	6	0	0	0	-2	0	1
$\zeta \subset S^2 \Delta$	5	1	-1	-1	1	1	0
$\zeta \otimes \text{sgn}$	5	-1	1	-1	1	-1	0

Упр. 3.11. Выберите в $U \otimes W$ базис, согласованный с этим прямым разложением и рассмотрите соответствующий ему базис из мономов m -й степени.

¹Геометрически оно описывается как действие $S_5 \simeq \text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ на пространстве функций с нулевой суммой значений на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$.