§3. Групповая алгебра конечной группы.

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что G — конечная группа, $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле, и $\operatorname{char}(\Bbbk) \nmid |G|$.

3.1. Определение и простейшие свойства. Обозначим через $\Bbbk G$ векторное пространство с базисом G, состоящее из формальных линейных комбинаций $\sum_{g\in G} c_g g$ элементов группы G с коэффициентами $c_g \in \Bbbk$. Групповая операция в G задаёт на $\Bbbk G$ структуру ассоциативной $\Bbbk$-алгебры с умножением

$$\left(\sum\nolimits_g a_g g\right)\left(\sum\nolimits_h b_h h\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\nolimits_{gh} a_g b_h gh = \sum\nolimits_f c_f f\,, \quad \text{где} \quad c_f = \sum\nolimits_{gh=f} a_g b_h\,. \tag{3-1}$$

Эта алгебра называется *групповой алгеброй* группы G над полем $\Bbbk$. Группа G вложена в алгебру $\Bbbk G$ в качестве мультипликативной подгруппы. Всякое линейное представление группы G

$$\varrho:\ G \to \mathrm{GL}(V) \tag{3-2}$$

однозначно продолжается по линейности до представления групповой алгебры

$$\tilde{\varrho}:\ \Bbbk G \to \mathrm{End}(V)\,, \tag{3-3}$$

образ которого является одновременно и линейной, и ассоциативной оболочкой всех операторов из группы G. Наоборот, каждое представление (3-3), будучи ограниченным на подгруппу $G \subset \Bbbk G$, задаёт представление (3-2). Поэтому в дальнейшем мы будем обозначать эти представления одной и той же буквой ϱ, считая, что $\varrho_{\sum x_g g} = \sum x_g \varrho_g$.

Пример 3.1 (групповые алгебры циклических групп)
Групповая алгебра $\Bbbk\mathbb{Z}$ бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ изоморфна алгебре $\Bbbk[t, t^{-1}]$ полиномов Лорана, а групповая алгебра $\Bbbk\mathbb{Z}/(n)$ циклической группы порядка n — алгебре вычетов $\Bbbk[t]/(t^n - 1)$. Первый изоморфизм действует на базис из групповых элементов по правилу $m \mapsto t^m$, второй — по правилу $[m]_n \mapsto [t^m]_{t^n-1}$, где в обоих случаях $m \in \mathbb{Z}$.

3.1.1. Проектор на инварианты. Если $\operatorname{char}(\Bbbk) \nmid |G|$, то в групповой алгебре $\Bbbk G$ имеется *оператор усреднения*

$$e_{\mathbb{1}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g\in G} g \in \Bbbk G\,. \tag{3-4}$$

Каждое линейное представление $\varrho:\ \Bbbk G \to \mathrm{End}(V)$ переводит элемент (3-4) в проектор на подмодуль G-инвариантов[1] $V^G \subset V$ представления ϱ. Обратите внимание, что $ge_{\mathbb{1}} = e_{\mathbb{1}} g$ для всех $g \in G$, т. е. элемент (3-4) лежит в центре[2]

$$Z_{\Bbbk G} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \Bbbk G \mid \forall\, x \in \Bbbk G\ zx = xz\} = \{z \in \Bbbk G \mid \forall\, g \in G\ gzg^{-1} = z\}$$

групповой алгебры $\Bbbk G$.

[1] См. форм. (2-4) на стр. 15.

[2] Напомню, что *центром* кольца K называется множество всех элементов, коммутирующих со всеми элементами K.

3.1.2. Центр групповой алгебры представляет собой коммутативную подалгебру в $\Bbbk G$, состоящую из всех таких линейных комбинаций $z = \sum_h z_h h$, что $z_{g^{-1}hg} = z_h$ для всех $g, h \in G$. Иными словами, элемент z централен, если и только если его коэффициенты z_h постоянны на классах сопряжённости. Мы заключаем, что элементы

$$z_C = \sum\nolimits_{h\in C} h\,, \tag{3-5}$$

где C пробегает множество Cl_G классов сопряжённости группы G, образуют базис векторного пространства $Z_{\Bbbk G}$ над $\Bbbk$, и $\dim_{\Bbbk} Z_{\Bbbk G} = |\mathrm{Cl}_G|$. Мы будем называть это число *числом классов*.

Каждое линейное представление $\Bbbk G \to \mathrm{End}(V)$ переводит все центральные элементы групповой алгебры в эндоморфизмы пространства V, перестановочные со всеми операторами из группы G. Из теоремы Бернсайда[1] вытекает, что в любом неприводимом представлении над алгебраически замкнутым полем все центральные элементы действуют умножениями на скаляры.

3.2. Изотипное разложение регулярного представления. Зафиксируем в каждом классе изоморфных неприводимых представлений группы G какого-нибудь представителя $\lambda : G \to \mathrm{GL}(U_\lambda)$ и обозначим множество всех таких представителей через $\mathrm{Ir}(G)$. По теор. 2.1 на стр. 16 и предл. 1.3 на стр. 10 всякий конечномерный G-модуль V обладает *изотипным разложением*

$$V = \bigoplus\nolimits_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} V_\lambda\,, \tag{3-6}$$

каждая компонента V_λ которого является суммой всех простых подмодулей в V, изоморфных данному $U_\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$. Для каждого $\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$ обозначим λ-изотипную компоненту *левого регулярного представления* группы G в $\Bbbk G$ по правилу $g : x \mapsto gx$ через $I_\lambda \subset \Bbbk G$. Таким образом,

$$\Bbbk G = \bigoplus\nolimits_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} I_\lambda\,. \tag{3-7}$$

Будучи G-подмодулем левого регулярного представления, изотипная компонента I_λ является левым идеалом алгебры $\Bbbk G$. Так как правое умножение $h : \Bbbk G \xrightarrow{\sim} \Bbbk G$, $x \to xh$, на любой элемент $h \in G$ перестановочно с левым действием G на $\Bbbk G$, каждая изотипная компонента левого регулярного представления переводится правым умножением на любой элемент группы в себя по предл. 1.2 на стр. 10. Поэтому каждая изотипная компонента I_λ является двусторонним идеалом алгебры $\Bbbk G$. Так как $I_\lambda \cap I_\varrho = 0$ при $\lambda \neq \varrho$, и $I_\lambda I_\varrho \subset I_\lambda \cap I_\varrho$, мы заключаем, что

$$I_\lambda I_\varrho = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq \varrho\,. \tag{3-8}$$

Обозначим через $e_\lambda \in I_\lambda$ компоненту единичного элемента $e \in G$ в разложении (3-7), так что

$$e = \sum\nolimits_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} e_\lambda\,, \quad \text{где} \quad e_\lambda \in I_\lambda\,. \tag{3-9}$$

Из (3-8) вытекает, что для каждого $x_\lambda \in I_\lambda$ выполняются соотношения $x_\lambda e_\mu = e_\mu x_\lambda = 0$ при $\lambda \neq \mu$, а также $x_\lambda e_\lambda = x_\lambda e = x_\lambda$ и $e_\lambda x_\lambda = e x_\lambda = x_\lambda$. В частности, $e_\lambda^2 = e_\lambda$ и $e_\lambda e_\varrho = 0$, когда $\varrho \neq \lambda$. Элементы e_λ называются *изотипными проекторами* (или *неприводимыми идемпотентами*) групповой алгебры $\Bbbk G$. Записывая произвольный $x \in \Bbbk G$ как $x = \sum_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} x_\lambda$, где $x_\lambda \in I_\lambda$, мы видим, что $xe_\lambda = x_\lambda = e_\lambda x$. Таким образом, все изотипные проекторы e_λ лежат в центре групповой алгебры, а каждая изотипная компонента $I_\lambda = (e_\lambda)$ является главным двусторонним идеалом, порождённым e_λ.

[1] См. сл. 1.5 на стр. 10.

Лемма 3.1
Любое линейное представление $\varrho : \Bbbk G \to \operatorname{End}(V)$ с нулевой λ-изотипной компонентой переводит изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk G$ в нуль.

Доказательство. Поскольку I_λ является левым идеалом в $\Bbbk G$, для любого вектора $v \in V$ подпространство $I_\lambda v = \{fv \mid f \in I_\lambda\}$ является G-подмодулем в V, и правило $f \mapsto fv$ задаёт сюръективный гомоморфизм G-модулей $I_\lambda \twoheadrightarrow I_\lambda v$. Поскольку такой гомоморфизм переводит λ-изотипный подмодуль в λ-изотипный, подмодуль $I_\lambda v$ содержится в изотипной компоненте V_λ представления V. Если она нулевая, то $I_\lambda v = 0$ для всех $v \in V$. □

Теорема 3.1 (теорема Машке)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ гомоморфизм алгебр

$$\mathfrak{rep} : \Bbbk G \to \prod\nolimits_{\lambda \in \operatorname{Ir}(G)} \operatorname{End}(U_\lambda), \tag{3-10}$$

переводящий элемент $f \in \Bbbk G$ в набор операторов $\lambda_f : U_\lambda \to U_\lambda$, которыми он действует во всех неприводимых представлениях группы G, является изоморфизмом алгебр. Ограничение гомоморфизма (3-10) на изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk G$ задаёт изоморфизм алгебр $I_\lambda \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(U_\lambda)$.

Доказательство. Сначала установим инъективность гомоморфизма $\mathfrak{rep}$. Если элемент $h \in \Bbbk G$ действует нулевым оператором во всех неприводимых представлениях, то он действует нулевым оператором вообще на любом конечномерном G-модуле, в частности — в левом регулярном представлении. Но $f \cdot 1 = 0$ влечёт $f = 0$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что по лем. 3.1 каждое неприводимое представление $\lambda : \Bbbk G \to \operatorname{End}(U_\lambda)$ отображает в нуль все прямые слагаемые разложения (3-7) за исключением I_λ. Однако по теореме Бернсайда[1] оно эпиморфно. Поэтому ограничение $\mathfrak{rep}|_{I_\lambda} = \lambda|_{I_\lambda} : I_\lambda \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(U_\lambda)$ является изоморфизмом. В частности, неприводимых представлений U_λ имеется лишь конечное число, и каждое из них присутствует в изотипном разложении левого регулярного представления с кратностью $m_\lambda(\Bbbk G) = \dim(I_\lambda)/\dim(U_\lambda) = \dim \operatorname{End}(U_\lambda)/\dim U_\lambda = \dim U_\lambda$. Для доказательства сюръективности гомоморфизма $\mathfrak{rep}$ остаётся заметить, что по уже доказанному для любого набора операторов $\varphi_\lambda \in \operatorname{End}(U_\lambda)$ найдутся такие элементы $f_\lambda \in I_\lambda$, что $\lambda(f_\lambda) = \varphi_\lambda$. Поскольку $\varrho(f_\lambda) = 0$ для всех неприводимых $\varrho \neq \lambda$, мы заключаем, что $\mathfrak{rep}(\sum_\lambda f_\lambda) = \prod_\lambda \varphi_\lambda$. □

Следствие 3.1
Число неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \nmid |G|$ конечно и равно числу классов сопряжённости $|\mathrm{Cl}_G|$ группы G, а сумма квадратов их размерностей равна $|G|$. При этом каждый неприводимый G-модуль U_λ входит в разложение регулярного представления с кратностью $m_\lambda(\Bbbk G) = \dim U_\lambda$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что размерность центра прямой суммы матричных алгебр равна количеству слагаемых, второе — из равенства размерностей правого и левого пространств в (3-10). □

Следствие 3.2
Неприводимые идемпотенты $e_\lambda \in I_\lambda$ из форм. (3-9) на стр. 24 образуют базис в центре групповой алгебры и действуют тождественным оператором в неприводимом представлении λ и

[1] См. сл. 1.5 на стр. 10.

нулевым оператором во всех остальных неприводимых представлениях. Произвольное линейное представление $\Bbbk G \to \mathrm{End}(V)$ переводит e_λ в G-инвариантный проектор на λ-изотипную компоненту $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Так как $x_\lambda e_\lambda = e_\lambda x_\lambda = x_\lambda$ для всех $x_\lambda \in I_\lambda$, изоморфизм

$$\mathfrak{rep}\,|_{I_\lambda} = \lambda|_{I_\lambda} : I_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(U_\lambda)$$

переводит e_λ в единицу Id_{U_λ} алгебры $\mathrm{End}(U_\lambda)$. Все остальные неприводиные представления переводят $e_\lambda \in I_\lambda$ в нуль по лем. 3.1 на стр. 25. Это доказывает второе и третье утверждения. Первое утверждение вытекает из второго по теор. 3.1, ибо центр прямой суммы $\bigoplus \mathrm{End}(U_\lambda)$ состоит из наборов скалярных операторов $c_\lambda \mathrm{Id}_{U_\lambda}$, где $c_\lambda \in \Bbbk$, и операторы $\mathfrak{rep}(e_\lambda)$ образуют базис этого пространства. □

Пример 3.2 (простенькие представления симметрических групп)
Поскольку сопоставление перестановке $g \in S_n$ её циклового типа устанавливает биекцию между классами сопряжённых элементов в S_n и n-клеточными диаграммами Юнга[1], неприводимые представления симметрической группы S_n биективно соответствуют диаграммам Юнга из n клеток. Каждая симметрическая группа S_n имеет два одномерных представления: тривиальное и *знаковое*, в котором каждая перестановка g действует умножением на знак $\mathrm{sgn}(g)$. Если $\mathrm{char}\,\Bbbk > n$, операторы симметризации и альтернирования

$$\mathrm{sym}_n = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{g\in S_n} g \quad \text{и} \quad \mathrm{alt}_n = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, g$$

являются S_n-инвариантными проекторами на тривиальную и знаковую изотипные компоненты любого S_n-модуля.

Упражнение 3.1. Убедитесь в этом.

Тавтологическое n-мерное представление группы S_n перестановками стандартных базисных векторов e_i пространства $\Bbbk^n$ имеет тривиальный одномерный подмодуль, порождённый суммой $e = e_1 + \ldots + e_n$ всех базисных векторов. Индуцированное $(n-1)$-мерное представление в фактор пространстве $\Bbbk^n/\Bbbk\, e$ называется *симплициальным*[2], поскольку над полем $\mathbb{R}$ его образ представляет собою полную группу правильного $(n-1)$-мерного симплекса в $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n/\mathbb{R}\cdot e$ с центром в нуле и вершинами в классах векторов e_i по модулю e.

Упражнение 3.2. Покажите, что симплициальное представление неприводимо.

Неприводимые представления группы S_3, имеющей ровно три класса сопряжённости, исчерпываются тривиальным и знаковым одномерными представлениями и двумерным представлением U_Δ группой треугольника в силу равенства $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$. Инвариантный проектор на U_Δ-изотипную компоненту любого представления задаётся оператором

$$\pi_\Delta \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = 1 - \frac{1}{6}\sum\nolimits_{g\in S_3}(1+\mathrm{sgn}(g))g = 1 - \frac{1}{3}\left(1+\tau+\tau^2\right),$$

где $\tau = |123\rangle \in S_3$ это цикл длины 3.

[1] См. пример 10.15 на с. 181 лекций [Алг 1].
[2] При $n = 2$ оно совпадает со знаковым.

Упражнение 3.3. Проверьте прямым вычислением в групповой алгебре, что π_Δ идемпотентен и лежит в центре, аннулирует тривиальный и знаковый модули, и тождественно действует в представлении группой треугольника.

У группы S_4, имеющей 5 классов сопряжённости, кроме одномерного тривиального, одномерного знакового и трёхмерного симплициального[1] представления несобственной группой тетраэдра[2] имеется ещё одно трёхмерное представление собственной группой куба[3], а также двумерное представление группой треугольника, возникающее из факторизации[4] $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ по подгруппе Клейна $V_4 \subset S_4$. Равенство $2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3^2 + 2^2 = 24$ указывает на то, что это хорошие кандидаты на полный список всех неприводимых представлений.

Упражнение 3.4. Покажите, что два трёхмерных представления неприводимы, не изоморфны и получаются друг из друга тензорным умножением на знаковое представление.

3.3. Каноническое скалярное произведение. Левое регулярное представление

$$L : \Bbbk G \hookrightarrow \operatorname{End}(\Bbbk G),$$

в котором каждый элемент $f \in \Bbbk G$ действует левым умножением $x \mapsto fx$, вкладывает алгебру $\Bbbk G$ в алгебру всех $\Bbbk$-линейных эндоморфизмов векторного пространства $\Bbbk G$. На алгебре эндоморфизмов имеется каноническая симметричная билинейная форма — след композиции.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что для конечномерного векторного пространства V билинейная форма $\operatorname{End}(V) \times \operatorname{End}(V) \to \Bbbk$, $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(AB)$, принимает на паре разложимых операторов[5] $A = \alpha \otimes a$ и $B = \beta \otimes b$, где $a, b \in V$, $\alpha, \beta \in V^*$, значение $\alpha(b) \cdot \beta(a)$, равное их полной свёртке[6], и выведите отсюда, что эта форма симметрична и невырождена.

Ограничение следа композиции на образ $L(\Bbbk G) \subset \operatorname{End}(\Bbbk G)$ левого регулярного представления задаёт на $\Bbbk G$ симметричное скалярное произведение

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}(L_f L_g) = \operatorname{tr}(L_{fg}). \tag{3-11}$$

Упражнение 3.6. Покажите, что левое и правое умножение на заданный элемент сопряжены другу другу относительно скалярного произведения: $(fg, h) = (f, gh)$ и выведите отсюда, что ортогональное дополнение к любому левому идеалу в $\Bbbk G$ является правым идеалом, а ортогональное дополнение к правому — левым[7].

Так как след левого умножения на единицу группы равен $|G|$, а умножение на любой другой элемент группы бесследно, скалярные произведения элементов группы задаются формулой

$$(g, h) = \begin{cases} |G| & \text{при } h = g^{-1} \\ 0 & \text{при } h \neq g^{-1}. \end{cases} \tag{3-12}$$

[1] См. прим. 2.1 на стр. 13.
[2] См. пример 10.4 на с. 172 лекций [Алг 1].
[3] См. пример 10.10 на с. 177 лекций [Алг 1].
[4] См. пример 10.9 на с. 176 лекций [Алг 1].
[5] См. пример 13.3 на с. 214 лекций [Алг 1].
[6] См. раздел 14.1 на с. 222 лекций [Алг 1].
[7] Тем самым, ортогональное дополнение к любому двустороннему идеалу тоже двусторонний идеал.

Таким образом, скалярное произведение невырождено[1], и двойственным базисом к базису из групповых элементов g является базис из элементов $g^\times = g^{-1}/|G|$. В частности, каждый элемент $z \in \Bbbk G$ разлагается по базису из групповых элементов в виде

$$z = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g\in G} (g^{-1}, z) \cdot g \tag{3-13}$$

Изоморфизм $\mathfrak{rep} : \Bbbk G \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$ из теоремы Машке[2] позволяет выразить скалярное произведение (3-11) через следы действий в неприводимых представлениях.

Предложение 3.1 (формула Планшереля)
Для всех $f, g \in \Bbbk G$ выполняется равенство $(f, g) = \sum_{\lambda\in \mathrm{Ir}(G)} \dim(U_\lambda) \cdot \mathrm{tr}(\lambda_{fg})$.

Доказательство. Вычислим $\mathrm{tr}(L_{fg})$ в алгебре $\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$. Он равен сумме следов левого умножения на λ_{fg} в $\mathrm{End}(U_\lambda)$ по всем неприводимым представлениям λ. След левого умножения на матрицу M в матричной алгебре $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ равен $n \cdot \mathrm{tr}(M)$, поскольку каждая матричная единица E_{ij} входит в ME_{ij} с коэффициентом m_{ii}. □

Следствие 3.3
Базисные идемпотенты составляют ортогональный базис центра групповой алгебры и имеют скалярные квадраты $(e_\lambda, e_\lambda) = \dim^2 U_\lambda$. □

Следствие 3.4
Разложение $\Bbbk G = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Ir}(G)} I_\lambda$ левого регулярного представления в прямую сумму изотипных подмодулей является *ортогональным* разложением, и неприводимые идемпотенты являются *ортогональными проекциями*[3] единицы $e \in \Bbbk G$ на изотипные подпространства I_λ.

Следствие 3.5
Базисный идемпотент e_λ выражается через элементы группы по формуле

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum\nolimits_{g\in G} \mathrm{tr}\left(\lambda_{g^{-1}}\right) \cdot g\,, \tag{3-14}$$

и каждое представление $\Bbbk G \to \mathrm{End}(V)$ переводит правую часть этого равенства в G-инвариантный проектор на λ-изотипный подмодуль $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Комбинируя форм. (3-13) на стр. 28 с формулой Планшереля, получаем

$$e_\lambda = |G|^{-1} \sum_{g\in G} (g^{-1}, e_\lambda) \cdot g = |G|^{-1} \sum_{g\in G} \sum_{\mu\in \mathrm{Ir}(G)} \dim(U_\mu) \cdot \mathrm{tr}\big(\mu(g^{-1} e_\lambda)\big) \cdot g =$$
$$= |G|^{-1} \sum_{g\in G} \sum_{\mu\in \mathrm{Ir}(G)} \dim(U_\mu) \cdot \mathrm{tr}\big(\mu(g^{-1})\mu(e_\lambda)\big) \cdot g = \frac{\dim(U_\lambda)}{|G|} \sum_{g\in G} \mathrm{tr}\big(\lambda(g^{-1})\big) \cdot g$$

(в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\mu(e_\lambda) = 0$ при $\mu \neq \lambda$, а $\lambda(e_\lambda) = \mathrm{Id}_{U_\lambda}$ по сл. 3.2 на стр. 25). □

[1] Отметим, что если характеристика поля делит порядок группы, то это не так.
[2] См. теор. 3.1 на стр. 25.
[3] См. раздел 10.4 на с. 137 лекций [Гео 1].

3.4. Характеры. Линейная форма на $\Bbbk G$, сопоставляющая элементу групповой алгебры след его действия на пространстве V линейного представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ называется *характером*[1] представления ϱ и обозначается

$$\chi_\varrho : \Bbbk G \to \Bbbk, \quad \chi_\varrho(f) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr} \varrho_f . \tag{3-15}$$

Так как след оператора не меняется при сопряжении, характер любого представления постоянен на классах сопряжённых элементов, и изоморфные представления имеют равные характеры. Формула (3-14) для проектора на λ-изотипную компоненту переписывается в терминах характеров как

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum\nolimits_{g\in G} \chi_\lambda\left(g^{-1}\right) \cdot g , \tag{3-16}$$

Пример 3.3 (характеры перестановочных представлений)
Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g. В частности, характер регулярного представления имеет вид

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & \text{если} \quad g = e \\ 0 & \text{если} \quad g \neq e . \end{cases}$$

Значение характера тавтологического представления симметрической группы S_n перестановками базисных векторов координатного пространства $\Bbbk^n$ на перестановке циклового типа λ равно $m_1(\lambda)$, т. е. числу строк длины 1 в диаграмме λ. Поскольку это представление является прямой суммой тривиального одномерного, с тождественно единичным характером, и симплициального, мы заключаем, что значение симплициального характера группы S_n на классе сопряжённости C_λ, состоящем из перестановок циклового типа λ, равно $\chi_\Delta(C_\lambda) = m_1(\lambda) - 1$.

Упражнение 3.7. Убедитесь, что характеры неприводимых представлений симметрической группы S_3 задаются таблицей

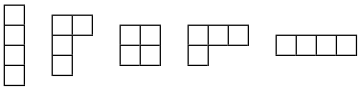
классы			
число элементов	1	3	2
значения характеров:			
тривиального	1	1	1
знакового	1	−1	1
треугольного	2	0	−1

(3-17)

и что проекторы на изотипные компоненты, вычисленные при помощи этой таблицы по формуле (3-16), совпадают с описанными ранее в прим. 3.2 на стр. 26.

[1] Не следует путать эти *аддитивные* характеры с мультипликативными характерами абелевых групп, обсуждавшимися в n° 2.4 на стр. 20. Только характеры одномерных представлений являются мультипликативными гомоморфизмами.

Пример 3.4 (неприводимые характеры S_4)
В геометрически заданных представлениях следы можно вычислять складывая собственные значения соответствующих поворотов и отражений. Например, значения характеров пяти представлений симметрической группы S_4 из прим. 3.2 задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	−1	1	1	−1
тетраэдрального	3	1	−1	0	−1
кубического	3	−1	−1	0	1
треугольного	2	0	2	−1	0

(3-18)

четвёртая строка которой объясняется так: след единицы равен размерности представления; одна транспозиция и пара независимых транспозиций действуют поворотами на 180° вокруг прямой, и собственные числа такого вращения суть 1, −1 и −1; цикл длины 3 и цикл длины 4 действуют поворотами на 120° и 90° соответственно, и их собственные числа суть 1, ω, ω^2 и 1, i, $-i$.

Лемма 3.2
Для любых двух представлений V, W группы G с характерами χ_U и χ_V

$$\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g) \tag{3-19}$$
$$\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g) \tag{3-20}$$
$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) \tag{3-21}$$
$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \chi_V(g^{-1})\chi_W(g) \tag{3-22}$$

Доказательство. Поскольку любой оператор g из конечной группы полупрост, в пространствах V и W имеются базисы $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ из собственных векторов g. Пусть α_i и β_j — соответствующие наборы собственных чисел. Набор собственных чисел g в представлении $V \oplus W$ получается объединением этих наборов, откуда следует (3-19). Собственными числами g в представлении $V \otimes W$ являются всевозможные попарные произведения $\alpha_i\beta_j$, что даёт (3-20). Формула (3-21) следует из того, что матрица g в двойственном представлении транспонирована к матрице g^{-1} в исходном (см. n° 2.1). Последняя формула следует из двух предыдущих. □

Упражнение 3.8. Докажите, что производящие функции для характеров симметрических и внешних степеней представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ имеют вид:

$$\sum\nolimits_{\nu\geqslant 0} \chi_{\Lambda^\nu V}(g)\, t^\nu = \det(1 + t\,\varrho(g)) \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_{\nu\geqslant 0} \chi_{S^\nu V}(g)\, t^\nu = \det(1 - t\,\varrho(g))^{-1}.$$

Следствие 3.6
Характер любого представления V выражается через неприводимые характеры χ_λ как

$$\chi_V = \sum\nolimits_{\lambda\in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V)\cdot \chi_\lambda \tag{3-23}$$

где $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda$ обозначает кратность простого G-модуля U_λ в V. □

3.5. Преобразование Фурье и алгебра функций на группе. Так как любая линейная форма на векторном пространстве однозначно задаётся своими значениями на базисных векторах, пространство $\Bbbk^G$ функций $G \to \Bbbk$ двойственно пространству $\Bbbk G$: каждая функция $\varphi : G \to \Bbbk$ задаёт линейную форму $\varphi(\sum x_g \cdot g) = \sum x_g \varphi(g)$, $\Bbbk$-линейно продолжающую φ с G на $\Bbbk G$. С другой стороны, скалярное произведение[1] на $\Bbbk G$ задаёт невырожденную корреляцию[2]

$$\Bbbk G \xrightarrow{\sim} \Bbbk G^*, \quad f \mapsto (f, *), \tag{3-24}$$

которая сопоставляет каждому вектору $f \in \Bbbk G$ линейную форму $\Bbbk G \to \Bbbk$, задаваемую скалярным умножением на этот вектор. Согласно формулам (3-12) и (3-13) на стр. 28 изоморфизм (3-24) переводит элементы $g^\times = g^{-1}/|G| \in \Bbbk G$ в базис векторного пространства $\Bbbk G^*$, двойственный к состоящему из элементов группы базису в $\Bbbk G$. Комбинируя обратный к (3-24) изоморфизм $\Bbbk G^* \xrightarrow{\sim} \Bbbk G$ с описанным выше отождествлением $\Bbbk^G \simeq \Bbbk G^*$, получаем изоморфизм векторных пространств

$$\Phi : \Bbbk^G \xrightarrow{\sim} \Bbbk G, \quad \varphi \mapsto \widehat{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} \varphi\left(g^{-1}\right) \cdot g, \tag{3-25}$$

который называется *преобразованием Фурье*. По форм. (3-16) на стр. 29 преобразование Фурье переводит неприводимые характеры в кратности неприводимых идемпотентов:

$$\widehat{\chi}_\lambda = e_\lambda / \dim U_\lambda. \tag{3-26}$$

Перенесём с помощью изоморфизма (3-25) скалярное произведение из $\Bbbk G$ в пространство функций на группе, т. е. положим

$$(\varphi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = \frac{1}{|G|^2} \sum\nolimits_{g,h \in G} \varphi(g^{-1})\psi(h^{-1})(g,h) = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} \varphi(g^{-1})\psi(g). \tag{3-27}$$

Из формулы (3-26) и сл. 3.3 на стр. 28 немедленно вытекают следующие результаты, полностью сводящие определение кратностей вхождения неприводимых G-модулей в данное представление к формальным линейным вычислениям с характерами.

Следствие 3.7
Неприводимые характеры образуют ортонормальный базис в пространстве функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. □

Следствие 3.8
$\dim \operatorname{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$ для всех G-модулей V и W.

Доказательство. Обе части равны $\sum_{\lambda \in \operatorname{Ir}(G)} m_\lambda(V) m_\lambda(W)$: левая — по сл. 1.6 на стр. 11, правая — в силу сл. 3.6 и ортонормальности характеров. □

Следствие 3.9
Кратность вхождения неприводимого представления U_λ в произвольное представление V равна скалярному произведению их характеров: $m_\lambda(V) = (\chi_\lambda, \chi_V)$.

[1] См. форм. (3-11) на стр. 27.
[2] См. раздел 13.1.2 на с. 172 лекций [Гео 1].

Доказательство. Скалярно умножаем обе части (3-23) на χ_λ и пользуемся ортонормальностью характеров. □

Следствие 3.10
Представление V неприводимо тогда и только тогда, когда $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

Доказательство. В силу ортонормальности неприводимых характеров из сл. 3.6 вытекает, что $(\chi_V, \chi_V) = \sum_{\lambda\in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda^2(V)$, где все $m_\lambda(V)$ целые неотрицательные. Такая сумма равна единице только если она состоит из одного слагаемого, равного единице. □

Упражнение 3.9. Опишите все неприводимые представления групп A_5 и S_5 и вычислите их характеры.

Замечание 3.1. (скалярное произведение комплексных характеров) Так как собственные числа всех операторов из конечной группы G являются корнями $|G|$-й степени из единицы, в любом представлении группы G над полем $\mathbb{C}$ следы обратных друг другу элементов g и g^{-1} комплексно сопряжены. Поэтому $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение комплексных характеров в виде стандартной эрмитовой структуры:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} \overline{\chi_1(g)}\cdot\chi_2(g)\,.$$

Замечание 3.2. (скалярное произведение характеров группы S_n) Обратные друг другу перестановки $g, g^{-1} \in S_n$ имеют одинаковый цикловой тип и, стало быть, сопряжены в S_n. Поэтому $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение характеров симметрической группы S_n виде стандартной евклидовой структуры:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{g\in S_n} \chi_1(g)\cdot\chi_2(g)\,.$$

В частности, над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ оно *положительно определено*.

Пример 3.5 (внешние степени симплициального представления S_n)
Покажем, что все внешние степени $(n-1)$-мерного симплициального[1] представления Δ_{n-1} симметрической группы S_n неприводимы. Разложение тавтологического представления τ группы S_n перестановками базисных векторов в $\Bbbk^n$ на неприводимые имеет вид $\tau = \mathbb{1}\oplus\Delta_{n-1}$. Поэтому его m-тая внешняя степень $\Lambda^m\tau \simeq \Lambda^m\Delta_{n-1}\oplus\Lambda^{m-1}\Delta_{n-1}$.

Упражнение 3.10. Покажите, что $\Lambda^m(U\oplus W) \simeq \bigoplus_{\alpha+\beta=m}\Lambda^\alpha U\otimes\Lambda^\beta W$.

Достаточно убедиться, что скалярный квадрат $\left(\chi_{\Lambda^m\tau}, \chi_{\Lambda^m\tau}\right) = 2$. В стандартном базисе

$$e_I = e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_m}\,,\ \text{где } i_1 < \ldots < i_m\,,$$

пространства $\Lambda^m(\Bbbk^n)$ след перестановки σ равен сумме знаков $\operatorname{sgn}\sigma|_I$ ограничений перестановки σ на все такие подмножества I, что $\sigma(I)\subset I$. Поэтому

$$\left(\chi_{\Lambda^k\tau}, \chi_{\Lambda^k\tau}\right) = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{\sigma\in S_n}\left(\sum\nolimits_{I:\ \sigma(I)\subset I}\operatorname{sgn}(\sigma|_I)\right)\cdot\left(\sum\nolimits_{J:\ \sigma(J)\subset J}\operatorname{sgn}(\sigma|_J)\right) =$$
$$= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{I,J:\ \substack{\sigma(I)\subset I\\ \sigma(J)\subset J}}\operatorname{sgn}(\sigma|_I)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma|_J) = \frac{1}{n!}\sum_{I,J}\sum_{\sigma:\ \substack{\sigma(I)\subset I\\ \sigma(J)\subset J}}\operatorname{sgn}(\sigma|_I)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma|_J)\,.$$

[1] См. прим. 2.1 на стр. 13.

Совокупность всех таких перестановок σ, что $\sigma(I) \subset I$ и $\sigma(J) \subset J$, распадается в прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I \cap J$, $I \smallsetminus (I \cap J)$, $J \smallsetminus (I \cap J)$, $\{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus (I \cup J)$ и изоморфное $S_k \times S_{m-k} \times S_{m-k} \times S_{n-2m+k}$, где $k = k(I,J) = |I \cap J|$. Поскольку $\operatorname{sgn}(\sigma|_I) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_J) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\cap J})^2 \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)}) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)}) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)}) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)})$, предыдущую сумму можно переписать как

$$\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{I,J} k! \cdot (n-2m+k)! \cdot \Big(\sum\nolimits_{g \in S_{m-k}} \operatorname{sgn}(g) \Big) \cdot \Big(\sum\nolimits_{h \in S_{m-k}} \operatorname{sgn}(h) \Big). \tag{3-28}$$

Последние два множителя отличны от нуля только при $k = m$ и $k = m-1$. Проверим, что вклад всех слагаемых с такими значениями $k = |I \cap J|$ в сумму (3-28) равен по единице в каждом из двух случаев. В первом случае $I = J$ и соответствующий кусок суммы (3-28) имеет вид

$$\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{I} m! \cdot (n-m)!\,.$$

Он состоит из $\binom{n}{m}$ одинаковых слагаемых, обратных к $\binom{n}{m}$, и их сумма равна 1. Во втором случае $|I \cap J| = (m-1)$ и соответствующий кусок суммы (3-28) равен

$$\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{I\cap J} \sum\nolimits_{i\neq j,\, i,j \notin I\cap J} (m-1)! \cdot (n-m-1)!\,.$$

Он состоит из $(n-m+1)(n-m)\binom{n}{m-1}$ одинаковых слагаемых вида

$$\frac{(m-1)! \cdot (n-m-1)!}{n!} = \binom{n}{m-1}^{-1} \cdot \frac{1}{(n-m+1)(n-m)}\,,$$

сумма которых тоже равна 1.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.4. Диагонали двумерных граней куба являются рёбрами двух центрально симметричных тетраэдров. Движения куба, осуществляющие чётную перестановку диагоналей, переводят каждый из этих двух тетраэдров в себя, осуществляя чётные перестановки их вершин. Каждое движение куба, осуществляющее нечётную перестановку его диагоналей, переводит тетраэдры друг в друга. Тензорное произведение такого движения со знаковым представлением есть ни что иное, как его композиция с центральной симметрией. Такая композиция переводит каждый из двух тетраэдров в себя и осуществляет нечётную перестановку их вершин.

Упр. 3.8. Поскольку каждый оператор $g \in G$ диагонализуем, в V существует базис $e_1, \dots, e_d$ из собственных векторов оператора g. Обозначим их собственные числа через $x_1, \dots, x_n$. Тогда базисы из мономов $e_1^{m_1} \dots e_d^{m_d}$ и грассмановых мономов $e_1 \wedge \dots \wedge e_i$, n в пространствах $S^n V$ и $\Lambda^n V$ будут собственными для операторов $S^n g$ и $\Lambda^n g$ соответственно, и их собственными числами будут всевозможные мономы $x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$ с $m_1 + \dots + m_d = n$ и всевозможные полилинейные мономы $x_{i_1} \dots x_{i_n}$, откуда $\operatorname{tr} S^n g = h_n(x_1, \dots, x_d)$ и $\operatorname{tr} \Lambda^n g = e_n(x_1, \dots, x_d)$. С другой стороны, $\det(1 + tg) = \prod_i (1 + tx_i) = E(t)$ и $\det(1 - tg)^{-1} = 1/E(-t) = H(t)$ суть производящие функции для многочленов[1] e_n и h_n.

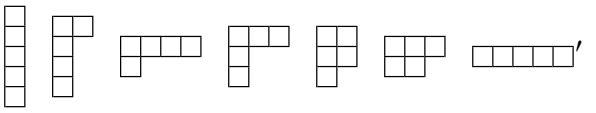
Упр. 3.9. Группа A_5 имеет два трёхмерных неприводимых представления вращениями икосаэдра (отличающиеся на композицию с внешним автоморфизмом A_5, который задаётся сопряжением любой транспозицией внутри S_5) и четырёхмерное представление вращениями симплекса. Полная таблица неприводимые характеров A_5 такова:

классы				(12345)	(21345)
число элементов	1	20	15	12	12
значения характеров:					
тривиальный	1	1	1	1	1
икосаэдр-1	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
икосаэдр-2	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
симплициальный	4	1	0	-1	-1
пятимерный	5	-1	1	0	0

Группа S_5 имеет знаковое одномерное представление sgn и симплициальное представление Δ. Представления $\operatorname{sgn} \otimes \Delta$ и $\Lambda^2 \Delta$ тоже неприводимы, а $S^2 \Delta = \operatorname{sgn} \oplus \Delta \oplus \zeta$, где ζ — неприводимое пятимерное представление, которое геометрически описывается как действие $S_5 \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$

[1] См. **??** на стр. **??** и **??** на стр. **??**.

на пространстве функций с нулевой суммой значений на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$. Ответ:

классы							
число элементов	1	10	30	20	15	20	24
значения характеров:							
тривиальный	1	1	1	1	1	1	1
знаковый α	1	-1	-1	1	1	-1	1
симплициальный ϑ	4	2	0	1	0	-1	-1
четырёхмерный $\vartheta \otimes \alpha$	4	-2	0	1	0	1	-1
шестимерный $\Lambda^2\vartheta$	6	0	0	0	-2	0	1
пятимерный $\zeta \subset S^2\vartheta$	5	1	-1	-1	1	1	0
пятимерный $\zeta \otimes \alpha$	5	-1	1	-1	1	-1	0

Упр. 3.10. Выберите в $U \otimes W$ базис, согласованный с этим прямым разложением и рассмотрите соответствующий ему базис из мономов m-й степени.