§4. Связи между представлениями группы и её погрупп.

Всюду в этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что G — конечная группа, $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле, и $\operatorname{char}(\Bbbk) \nmid |G|$.

4.1. Кольцо представлений произведения групп. Согласно сл. 3.10 на стр. 32 классы изоморфных представлений группы G биективно соответствуют характерам, и каждый характер является линейной комбинацией неприводимых характеров с неотрицательными целыми коэффициентами, равными кратностям вхождения соответствующих неприводимых подмодулей в рассматриваемое представление. По лем. 3.2 на стр. 30 прямым суммам и тензорным произведениям представлений отвечает сложение и умножение их характеров. Обе эти операции над представлениями коммутативны в том смысле, что представления $U \otimes W$ и $W \otimes U$ изоморфны и тем самым лежат в одном классе, и то же самое относится к представлениям $U \oplus W$ и $W \oplus U$. Также имеет место дистрибутивность: $(U \oplus W) \otimes V \simeq (U \otimes V) \oplus (W \otimes V)$ для любых G-модулей U, V, W. Это позволяет расширить множество классов изоморфных представлений до коммутативного кольца с единицей, которое обозначается R_G и называется *кольцом представлений* группы G. По определению, элементами этого кольца являются формальные целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров, т. е. как абелева группа по сложению кольцо R_G представляет собой свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом из неприводимых характеров. Элементы кольца R_G, содержащие отрицательные кратности неприводимых характеров, называются *виртуальными представлениями*. Линейные комбинации неприводимых характеров с натуральными коэффициентами взаимно однозначно соответствуют «настоящим» ненулевым G-модулям, рассматриваемым с точностью до изоморфизма. Тензорное умножение «настоящих» G-модулей однозначно распространяется до $\mathbb{Z}$-билинейного коммутативного ассоциативного умножения $R_G \times R_G \to R_G$. Нулём кольца R_G является тривиальное представление группы G в нулевом векторном пространстве 0, единицей — тривиальное одномерное представление $\mathbb{1}$.

Пример 4.1 ($R_{D_4} \simeq R_{Q_8}$)
Не изоморфные конечные группы могут иметь изоморфные кольца представлений. Например, группа квадрата D_4 и группа кватернионных единиц Q_8 имеют одинаковые таблицы неприводимых характеров:

группа:	представители классов:				
Q_8	1	-1	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
D_4	Id	$-\mathrm{Id}$	σ	τ	$\sigma\tau$
# эл-тов в классе	1	1	2	2	2
значения характеров:					
V_{++}	1	1	1	1	1
V_{+-}	1	1	1	-1	-1
V_{-+}	1	1	-1	1	-1
V_{--}	1	1	-1	-1	1
2-мерный	2	-2	0	0	0

и стало быть, одинаковые кольца представлений. Четыре одномерных характера отвечают представлениям, в которых отражения относительно одной пары перпендикулярных осей квадрата и повороты на $\pm 90^\circ$ (соответственно $\pm\boldsymbol{i}$ и $\pm\boldsymbol{j}$) действуют умножениями на ± 1 со всеми возможными сочетаниями знаков. В нижней строке таблицы написан характер тавтологического двумерного представления группы квадрата (соответственно тавтологического представления

кватернионных единиц

$$\pm\boldsymbol{e} = \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \pm\boldsymbol{i} = \pm\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}, \quad \pm\boldsymbol{j} = \pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \quad \pm\boldsymbol{k} = \pm\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},$$

рассматриваемых как элементы вещественной подалгебры[1] $\mathbb{H} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, в координатном пространстве $\mathbb{C}^2$.)

4.1.1. Внешнее тензорное произведение. Из линейных представлений $\mu\colon G \to \mathrm{GL}(U)$ и $\nu\colon H \to \mathrm{GL}(W)$ групп G и H можно изготовить линейное представление группы $G \times H$ в пространстве $U \otimes W$, в котором каждый элемент $(g, h) \in G \times H$ действует оператором

$$\mu_g \otimes \nu_h\colon u \otimes w \mapsto \mu_g(u) \otimes \nu_h(w).$$

Это представление обозначается $\mu \boxtimes \nu\colon G \times H \to \mathrm{GL}(U \otimes W)$, $(g, h) \mapsto \mu_g \otimes \nu_h$, и называется *внешним тензорным произведением* представлений μ и ν. Его не следует путать с тензорным произведением представлений одной и той же группы, обсуждавшимся в прим. 2.3 на стр. 13.

Упражнение 4.1. Убедитесь, что характеры представлений λ, μ и $\lambda \boxtimes \mu$ связаны соотношением $\chi_{\lambda\boxtimes\mu}((g, h)) = \chi_\lambda(g)\chi_\mu(h)$ для всех $g \in G$, $h \in H$.

Теорема 4.1
Пусть H — конечная, а G — произвольная группы, и основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, причём $\mathrm{char}\,\Bbbk \nmid |H|$. Тогда каждое конечномерное неприводимое представление группы $G \times H$ является является внешним произведением некоторых неприводимых представлений групп G и H, и наоборот, внешнее тензорное произведение любых двух конечномерных неприводимых представлений групп G и H является неприводимым представлением группы $G \times H$.

Доказательство. Пусть $\varrho\colon G \times H \to \mathrm{GL}(V)$ — конечномерное неприводимое представление. Рассмотрим его как H-модуль, на котором каждый элемент $h \in H$ действует оператором $\varrho_{(e,h)}$. Поскольку элементы (g, e) и (e, h) коммутируют друг с другом при всех $g \in G$ и $h \in H$, все операторы $\varrho_{(g,e)}$ переводят в себя каждую изотипную компоненту[2] H-модуля V, вполне приводимого в силу условий, наложенных на H и $\Bbbk$. Мы заключаем, что каждая H-изотипная компонента является $G \times H$-подмодулем в V. В силу неприводимости V такая компонента всего одна, и по предл. 1.4 на стр. 11 она имеет вид $\mathrm{Hom}_H(W, V) \otimes W$ для некоторого простого H-модуля W, т. е. V как H-модуль является тензорным произведением тривиального представления группы H в пространстве $\mathrm{Hom}_H(W, V)$ и некоторого неприводимого представления $\mu\colon H \to \mathrm{GL}(W)$. На пространстве $\mathrm{Hom}_H(W, V)$ имеется естественное действие $\lambda\colon G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}_H(W, V))$ группы G по правилу $\lambda_g\colon \varphi \mapsto \varrho_{(g,e)} \circ \varphi$.

Упражнение 4.2. Убедитесь, что для любого перестановочного с действием группы H линейного оператора $\varphi\colon V \to V$ и любого $g \in G$ композиция $\varrho_{(g,e)} \circ \varphi\colon V \to V$ тоже перестановочна с действием H.

Таким образом на пространстве $\mathrm{Hom}_H(W, V) \otimes W$ имеется структура $G \times H$-модуля, изоморфного внешнему тензорному произведению $\lambda \boxtimes \mu$, и изоморфизм из предл. 1.4

$$c_{VW}\colon \mathrm{Hom}_H(W, V) \otimes W \xrightarrow{\sim} V, \quad \varphi \otimes w \mapsto \varphi(w)$$

[1] См. раздел 17.1 на с. 264 лекций [Алг 1].
[2] См. предл. 1.2 на стр. 10.

является изоморфизмом $G \times H$-модулей. Так как каждое G-инвариантное подпространство $U \subset \subset \operatorname{Hom}_H(W, V)$ задаёт $G \times H$-инвариантное подпространство $c_{VW}(U \otimes W) \subset V$, а $G \times H$-модуль V неприводим, мы заключаем, что G-модуль $\operatorname{Hom}_G(W, V)$ неприводим, т. е. $\varrho = \lambda \boxtimes \mu$ является внешним тензорным произведением неприводимых представлений.

Наоборот, пусть даны неприводимые представления $\lambda\colon G \to \mathrm{GL}(U)$ и $\mu\colon H \to \mathrm{GL}(W)$. Рассмотрим $U \otimes W$ как тензорное произведение тривиального представления группы H в пространстве U и представления μ. Выберем в U базис $u_1, \dots, u_n$. Тогда G-модуль $U \otimes W$ распадётся в прямую сумму n подмодулей $\Bbbk u_i \otimes W \simeq W$ и любой вектор $v \in U \otimes W$ однозначно представится в виде $v = \sum u_i \otimes w_i$ с $w_i \in U$, причём все отображения $\xi_i\colon W \otimes U \to U$, $v \mapsto w_i$, будут гомоморфизмами G-модулей. Из этого вытекает, что каждый неприводимый H-подмодуль в $U \otimes W$ имеет вид $u \otimes W$ для некоторого вектора $u \in U$. В самом деле, поскольку $U \otimes W$ является W-изотипным G-подмодулем, каждый его неприводимый подмодуль $V \subset U \otimes W$ изоморфен W. Зафиксирует такой изоморфизм $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$. По лемме Шура над алгебраически замкнутым полем[1] пространство $\operatorname{Hom}_G(V, W)$ одномерно с базисом φ. Поэтому ограничение каждой проекции ξ на V имеет вид $\xi|_V = x_i\varphi$ для некоторых $x_i \in \Bbbk$. Тем самым любой вектор $v \in V$ имеет вид $v = \sum u_i \otimes (x_i\varphi(v)) = (\sum x_i u_i) \otimes \varphi(v)$, т. е. лежит в неприводимом подмодуле $u \otimes W$, где $u = \sum x_i u_i$. Теперь рассмотрим ненулевой $G \times H$-подмодуль $L \subset U \otimes W$. Подпространство L инвариантно относительно описанного выше действия H на $U \otimes W$ и содержит какой-нибудь ненулевой неприводимый H-подмодуль[2], по предыдущему равный $u \otimes W$ для некоторого $u \in U$. Для каждого $w \in W$ положим $U_w = \{v \in U \mid v \otimes w \in L\}$. Это G-инвариантное подпространство в U, поскольку $\lambda_g(v) \otimes w = \lambda_g \otimes \varrho_e(v \otimes w) \in L$, коль скоро $v \otimes w \in L$. Так как каждое подпространство U_w содержит ненулевой вектор u, все эти подпространства совпадают с U в силу неприводимости U. Тем самым, $v \otimes w \in L$ для всех $v \in U$ и $w \in W$, т. е. $L = U \otimes W$. □

4.1.2. Тензорные произведения коммутативных колец. Из любых двух коммутативных колец A и B с единицами можно изготовить коммутативное кольцо $A \otimes B$, которое как абелева группа по сложению является тензорным произведением[3] $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ аддитивных абелевых групп[4] колец A и B, а умножение разложимых тензоров задаётся правилом

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$$

и по $\mathbb{Z}$-линейности продолжается на все остальные тензоры. Нулём кольца $A \otimes B$ является $0 \otimes 0$, единицей — $1 \otimes 1$. Отображения

$$\iota_A\colon A \to A \otimes B\,,\ a \mapsto a \otimes 1\,, \quad \text{и} \quad \iota_B\colon B \to A \otimes B\,,\ b \mapsto 1 \otimes b\,,$$

являются гомоморфизмами колец и обладает следующим универсальным свойством: для любых гомоморфизмов колец $\alpha\colon A \to C$ и $\beta\colon B \to C$ существует единственный такой гомоморфизм колец $\alpha \otimes \beta\colon A \otimes B \to C$, что $\alpha = (\alpha \otimes \beta) \circ \iota_A$ и $\beta = (\alpha \otimes \beta) \circ \iota_B$.

Упражнение 4.3. Выведите это свойство из универсального свойства тензорного произведения $\mathbb{Z}$-модулей и покажите, что оно определяет кольцо $A \otimes B$ и гомоморфизмы ι_A, ι_B однозначно с точностью до единственного перестановочного с ними изоморфизма.

[1] См. сл. 1.2 на стр. 7.

[2] Сгодится, например, любой H-подмодуль минимальной положительной размерности.

[3] См. раздел 13.1 на с. 210 лекций [Алг 1].

[4] Или, что то же самое, модулей над $\mathbb{Z}$, см. пример 5.4 на с. 83 лекций [Алг 1].

Следствие 4.1
Для любых двух конечных групп G, H и алгебраически замкнутого поля $\Bbbk$, над которым рассматриваются все представления и характеристика которого не делит ни $|G|$, ни $|H|$, отображение $R_G \otimes R_H \xrightarrow{\sim} R_{G\times H}$, $\lambda \otimes \mu \mapsto \lambda \boxtimes \mu$, является изоморфизм колец.

Доказательство. По упр. 4.1 на стр. 35 отображения

$$\alpha\colon R_G \to R_{G\times H},\ \lambda \mapsto \lambda \boxtimes \mathbb{1}_H \quad \text{и} \quad \beta\colon R_H \to R_{G\times H},\ \mu \mapsto \mathbb{1}_G \boxtimes \mu,$$

где $\mathbb{1}_G$ и $\mathbb{1}_H$ — тривиальные одномерные представления групп G и H, являются гомоморфизмами колец, и правило $\lambda \otimes \mu \mapsto \lambda \boxtimes \mu$ задаёт их подъём до гомоморфизма $R_G \otimes R_H \xrightarrow{\sim} R_{G\times H}$. Его биективность вытекает из того, что тензорным произведением свободных $\mathbb{Z}$-модулей с базисами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_m$ является свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом[1] $\lambda_i \otimes \mu_j$, и по теор. 4.1 неприводимые представления группы $G \times H$ имют вид $\lambda_i \boxtimes \mu_j$, где λ_i и μ_j независимо пробегают неприводимые представления групп G и H. □

4.2. Индуцированные модули. Пусть ассоциативная $\Bbbk$-алгебра A с единицей является подалгеброй ассоциативной $\Bbbk$-алгебры B с той же единицей, что и в A. Тогда любое представление W алгебры B одновременно является и представлением алгебры A. Пространство W, рассматриваемое как модуль над A, называется *ограничением* B-модуля W на A и обозначается $\operatorname{res} W$ или $\operatorname{res}^B_A W$, если важно указать, о каких B и A идёт речь.

Простейшим примером этой ситуации является овеществление комплексного векторного пространства[2]: если $A = \Bbbk = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то n-мерное векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$ может рассматриваться как вещественное векторное пространство $W_{\mathbb{R}} = \operatorname{res}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}} W$ размерности $2n$.

Наоборот, по любому A-модулю V можно построить B-модуль $\operatorname{ind}^B_A V = B \otimes_A V$, который называется *индуцированным* с A-модуля V и часто обозначается просто $\operatorname{ind} V$, если понятно о каких A и B речь. Он определяется как фактор тензорного произведения векторных пространств $B \otimes_\Bbbk V$ по подпространству, порождённому всевозможными разностями

$$ba \otimes v - b \otimes av, \text{ где } b \in B,\ a \in A,\ v \in V.$$

По построению, в пространстве $B \otimes_A V$ выполняются равенства $ba \otimes_A v = b \otimes_A av$, т. е. элементы алгебры A «проносятся» через знак тензорного произведения. Поэтому такое произведение называется *тензорным произведением над* A. Структура модуля над B задаётся правилом[3]

$$b\,(b' \otimes v) \stackrel{\text{def}}{=} (bb') \otimes v.$$

Простейшим примером этой ситуации является комплексификация вещественного векторного пространства: если $\Bbbk = A = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то из n-мерного вещественного векторного пространства V можно изготовить комплексное векторное пространство $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ той же размерности n, но уже над полем $\mathbb{C}$.

[1] См. предложение 13.3 на с. 213 лекций [Алг 1].
[2] См. раздел 15.1 на с. 242 лекций [Алг 1].
[3] Ср. с разделом 13.5 на с. 220 лекций [Алг 1].

Предложение 4.1
Отображение $\tau_A : V \to B \otimes_A V$, $v \mapsto 1 \otimes_A v$, является гомоморфизмом A-модулей, и для перестановочного с действием A гомоморфизма $\varphi : V \to W$ в любой B-модуль W существует единственный такой гомоморфизм B-модулей $\psi : B \otimes_A V \to W$, что $\psi \circ \tau_A = \varphi$. Иначе говоря, для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_B(\operatorname{ind} V, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(V, \operatorname{res} W), \quad \psi \mapsto \psi \circ \tau_A. \tag{4-1}$$

Доказательство. Для каждого гомоморфизма B-модулей $\psi : B \otimes_A U \to V$ композиция

$$\varphi = \psi \circ \tau_A : V \to W, \quad v \mapsto \psi(1 \otimes_A u),$$

является гомоморфизмом A-модулей, поскольку $\varphi(av) = \psi(1 \otimes_A av) = \psi(a \otimes_A v) = a\psi(1 \otimes_A v) = a\varphi(v)$. Тем самым, отображение (4-1) определено корректно. Для данного гомоморфизма A-модулей $\varphi : V \to W$ такой гомоморфизм B-модулей $\psi : B \otimes_A V \to W$, что $\varphi = \psi \circ \tau_A$, обязан действовать на разложимые тензоры по правилу $b \otimes v \mapsto b\varphi(v)$. Тем самым, он единствен. Будучи билинейным по b и v, это правило корректно задаёт линейный оператор $B \otimes V \to W$, который переводит соотношения $ba \otimes v - b \otimes av$ в нуль, ибо $ba\psi(v) - b\psi(av) = 0$ в силу A-линейности ψ. Поэтому он корректно спускается до линейного отображения $B \otimes_A V \to W$, перестановочность которого с левым умножением на элементы $b \in B$ очевидна. □

Упражнение 4.4. Убедитесь, что универсальное свойство из предл. 4.1 определяет B-модуль $B \otimes_A V$ вместе с A-линейным отображением τ_A однозначно с точностью до единственного B-линейного изоморфизма, перестановочного с τ_A, и проверьте, что ограничение и индуцирование представлений перестановочны с прямыми суммами и с тензорными произведениями представлений.

4.2.1. Индуцированные представления групп. В ситуации, когда $B = \Bbbk G$ и $A = \Bbbk H$ являются групповыми алгебрами конечной группы G и какой-нибудь её подгруппы $H \subset G$, ограничение и индуцирование сопоставляют каждому линейному представлению $\varrho : G \to \mathrm{GL}(W)$ его *ограничение* $\operatorname{res} \varrho \stackrel{\text{def}}{=} \varrho|_H : H \to \mathrm{GL}(W)$ на подгруппу H, а каждому линейному представлению $\lambda : H \to \mathrm{GL}(V)$ — *индуцированное* им представление $\operatorname{ind} \lambda : G \to \mathrm{GL}(\Bbbk G \otimes_{\Bbbk H} V)$ группы G так, что имеет место канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_G(\operatorname{ind} V, W) \simeq \operatorname{Hom}_H(V, \operatorname{res} W). \tag{4-2}$$

Если нужно подчеркнуть, о каких G и $H \subset G$ идёт речь, мы пишем res_H^G и ind_H^G.

Предложение 4.2 (взаимность Фробениуса)
Для характеров χ_W, χ_U произвольных представлений $G \to \mathrm{GL}(W)$ и $H \to \mathrm{GL}(U)$ конечной группы G и её подгруппы H имеет место равенство скалярных произведений

$$(\chi_{\operatorname{ind} U}, \chi_W)_G = (\chi_U, \chi_{\operatorname{res} W})_H, \tag{4-3}$$

в частности, кратность неприводимого G-модуля W в разложении индуцированного с неприводимого H-модуля U представления группы G равна кратности модуля U в разложении ограничения представления W на подгруппу H:

$$m_U(\operatorname{res} W) = m_W(\operatorname{ind} U). \tag{4-4}$$

Доказательство. Равенство (4-3) получается из (4-2) по сл. 3.8 на стр. 32 сравнением размерностей обеих частей. Соотношение (4-4) вытекает из (4-3) по сл. 3.9 на стр. 32. □

Следствие 4.2
Если группа G имеет абелеву подгруппу $H \subset G$, то размерность любого неприводимого представления группы G не превышает[1] индекса $[G : H]$.

Доказательство. Пусть представление U группы G неприводимо, и L — одномерный H-подмодуль в $\operatorname{res} U$. В силу взаимности Фробениуса $\operatorname{ind} L$ содержит U с ненулевой кратностью, откуда $\dim U \leqslant \dim \operatorname{ind} L = [G : H]$. □

Предложение 4.3 (транзитивность индуцирования)
Для пары вложенных подгрупп $K \subset H \subset G$ и любого представления $\varrho : K \to \mathrm{GL}(U)$ имеется канонический изоморфзм G-модулей $\operatorname{ind}_H^G \operatorname{ind}_K^H U \xrightarrow{\sim} \operatorname{ind}_H^G U$.

Доказательство. Поскольку для любого G-модуля W имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_K(U, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_H(\operatorname{ind}_K^H U, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_G(\operatorname{ind}_H^G \operatorname{ind}_K^H U, W), \quad \psi \mapsto \psi \circ \tau_K \circ \tau_H,$$

отображение $\tau_K \circ \tau_H : U \to \operatorname{ind}_H^G \operatorname{ind}_K^H U$ универсально в смысле предл. 4.1. По упр. 4.4 оно отождествляется с отображением $U \to \operatorname{ind}_K^G U$ единственным изоморфизмом. □

Упражнение 4.5. Покажите, что ограничение и индуцирование перестановочны с прямыми суммами представлений.

4.2.2. Строение индуцированного представления. Тензорное произведение

$$\Bbbk G \otimes U = \bigoplus\nolimits_{g \in G} (\Bbbk \cdot g) \otimes V$$

представляет собою прямую сумму $|G|$ копий пространства V, занумерованных элементами $g \in G$. Факторизация по соотношениям $(gh) \otimes v = g \otimes (hv)$ склеивает между собою все прямые слагаемые, занумерованные элементами из одного смежного класса gH так, что $gh \otimes v$ отождествляется с $g \otimes hv$. В результате тензорное произведение над $\Bbbk H$ оказывается изоморфно прямой сумме $r = [G : H]$ копий пространства V занумерованных какой-либо фиксированной системой $\{g_1, \dots, g_r\}$ представителей левых смежных классов подгруппы H

$$\Bbbk G \otimes_{\Bbbk H} V \simeq g_1 V \oplus \dots \oplus g_r V. \tag{4-5}$$

В этом разложении каждое $g_\nu V$ представляет собой копию пространства V, а стоящий слева значок g_ν указывает, что данная копия соответствует смежному классу $g_\nu H$. Если писать $g_\nu v$ для обозначения вектора $v \in V$, лежащего в g_ν-й копии $g_\nu V$ пространства V, то каждый вектор $w \in \Bbbk G \otimes_{k[H]} V$ однозначно запишется в виде суммы $\sum_{\nu=1}^{r} g_\nu v_\nu$, где $v_\nu \in V$. Левое умножение на элемент $g \in G$ в группе G осуществляет перестановку смежных классов: для каждых $g \in G$ и $\nu \in \{1, \dots, r\}$ найдутся единственные такие $h = h(g, \nu) \in H$ и $\mu = \mu(g, \nu) \in \{1, \dots, r\}$, что $g g_\nu = g_\mu h$. В этих обозначениях действие элемента $g \in G$ на вектор $g_\nu v \in g_\nu V$ происходит по правилу $g g_\nu v = g_\mu h v \in g_\mu V$, где $hv \in V$ есть результат действия оператора $h \in H$ на вектор $v \in V$ согласно представлению подгруппы H в $\mathrm{GL}(V)$.

[1] Ниже, в теор. 4.2 на стр. 45 мы увидим, что если абелева подгруппа H нормальна в G, то размерности всех неприводимых G-модулей *делят* индекс $[G : H]$.

Пример 4.2
Пусть $G = S_3$ и $H \simeq S_2$ — подгруппа, порождённая транспозицией $\sigma = |12\rangle$. В качестве представителей смежных классов G/H выберем e, τ и τ^2, где $\tau = |123\rangle$. Представление $W = \operatorname{ind} \mathbb{1}$, индуцированное тривиальным одномерным представлением, трёхмерно с базисом e, τ, τ^2 и образующие $\sigma, \tau \in S_3$ действуют на этот базис матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Тем самым, W изоморфно тавтологическому представлению S_3 и является суммой тривиального одномерного представления и двумерного представления группой треугольника. Представление $W' = \operatorname{ind} \operatorname{sgn}$, индуцированное одномерным знаковым представлением, также трёхмерно с тем же базисом, но σ и τ теперь действуют на него матрицами

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это представление является прямой суммой знакового представления в одномерном пространстве, натянутом на $e + \tau + \tau^2$ и треугольного представления в ортогональной плоскости. Представление, индуцированное с двумерного левого регулярного представления $\Bbbk[S_2]$, это 6-мерное левое регулярное представление группы S_3 в $\Bbbk[S_3] = e \cdot \Bbbk[S_2] \oplus \tau \cdot \Bbbk[S_2] \oplus \tau^2 \cdot \Bbbk[S_2]$.

Упражнение 4.6. Убедитесь, что регулярное представление любой подгруппы всегда индуцирует регулярное представление объемлющей группы.

Предложение 4.4 (характер индуцированного представления)
Пусть пересечение класса сопряжённых элементов $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ раскладывается в объединение $C \cap H = D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_m$ различных классов H-сопряжённости. Тогда для любого представления V подгруппы H характер индуцированного им представления принимает на классе C значение $\chi_{\operatorname{ind} V}(C) = [G : H] \cdot \sum_{i=1}^{m} \chi_V(D_i) \cdot |D_i| / |C|$. В частности, для тривиального одномерного представления $V = \mathbb{1}$ имеем

$$\chi_{\operatorname{ind} \mathbb{1}}(C) = [G : H] \cdot |C \cap H| / |C| \,. \tag{4-6}$$

Доказательство. Поскольку элемент $g \in C$ переставляет слагаемые $g_\nu V$ разложения (4-5), след его действия равен сумме следов действий на тех слагаемых $g_\nu V$, которые остаются при этой перестановке на месте, что означает равенство $g g_\nu = g_\nu h$ для некоторого $h = g_\nu^{-1} g g_\nu \in H$. При этом действие элемента g на таком слагаемом $g_\nu V$ совпадает с действием элемента h на пространстве V, и его след равен $\chi_V(h) = \chi_V(g_\nu^{-1} g g_\nu)$. Поэтому

$$\chi_{\operatorname{ind} V}(g) = \sum_{\substack{\nu: \\ g_\nu^{-1} g g_\nu \in H}} \chi_V(g_\nu^{-1} g g_\nu) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G: \\ s^{-1} g s \in H}} \chi_V(s^{-1} g s) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{s \in G: \\ s^{-1} g s \in D_i}} \chi_V(D_i) \,,$$

где во втором равенстве мы заменили каждое слагаемое левой суммы на $|H|$ равных друг другу слагаемых, получающихся заменой элемента g_ν на всевозможные $s \in g_\nu H$, а в третьем —

собрали вместе все слагаемые, у которых $s^{-1}gs$ лежит в одном классе H-сопряжённости D_i. Поскольку различных произведений $s^{-1}gs \in D_i$ имеется $|D_i|$ штук, и по формуле для длины орбиты каждое из них получается из $|G|/|C|$ различных $s \in G$, мы заключаем, что $\chi_{\operatorname{ind} V}(g) = |H|^{-1}\sum_{i=1}^{m}\chi_V(D_i)\cdot|D_i|\cdot|G|/|C|$. □

Упражнение 4.7 (формула проекции). Убедитесь, что для любых G-модуля W и H-модуля V имеется канонический изоморфизм G-модулей[1] $\operatorname{ind}\bigl((\operatorname{res} W)\otimes V\bigr) \simeq W\otimes \operatorname{ind} V$.

4.3. Коиндуцированные модули. В теории представлений ассоциативных алгебр имеется ещё один способ сопоставить A-модулю V модуль над алгеброй B, содержащей A в качестве подалгебры, а именно — *коиндуцированный модуль* $\operatorname{coind} V \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_A(B,V)$, на котором имеется *левое* действие алгебры B *правым* умножением аргументов:

$$b:\ \psi\mapsto b\psi\,,\ \text{где } b\psi(b')=\psi(b'b)\,.$$

Упражнение 4.8. Проверьте равенство $(b_1b_2)\,\psi = b_1(b_2\psi)$.

Коиндуцированный модуль обладает двойственным к описанному в предл. 4.1 на стр. 37 универсальным свойством: каноническое отображение $\tau^A:\ \operatorname{Hom}_A(B,V)\to V$, $\varphi\mapsto\varphi(1)$, является гомоморфизмом A-модулей, и для любого перестановочного с действием A гомоморфизма $\varphi:\ W\to V$ в произвольный B-модуль W существует единственный такой гомоморфизм B-модулей $\psi:\ W\to\operatorname{Hom}_A(B,V)$, что $\tau^A\circ\psi=\varphi$, т. е. для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_B(W,\operatorname{coind} V)\xrightarrow{\sim}\operatorname{Hom}_A(\operatorname{res} W,V)\,,\quad \psi\mapsto\tau^A\circ\psi\,, \tag{4-7}$$

сопоставляющий гомоморфизму B-модулей $\psi:\ W\to\operatorname{Hom}_A(B,V)$, $w\mapsto\psi_w$, гомоморфизм A-модулей

$$\tau^A\circ\psi:\ W\to V\,,\ w\mapsto\psi_w(1)\,.$$

Обратное отображение переводит гомоморфизм A-модулей $\varphi:\ W\to V$ в гомоморфизм B-модулей

$$\psi:\ W\to\operatorname{Hom}_A(B,V)\,,\ w\mapsto\psi_w\,,\ \text{где } \psi_w:\ B\to V\,,\ b\mapsto\varphi(bw)\,.$$

Упражнение 4.9. Убедитесь, что оба отображения корректно определены и взаимно обратны.

В ситуации, когда $A=\Bbbk H$, $B=\Bbbk G$ суть групповые алгебры конечной группы G и её подгруппы $H\subset G$, преобразование Фурье[2] индуцирует изоморфизм векторных пространств

$$\Phi\otimes_\Bbbk \mathrm{Id}_V:\ \operatorname{Hom}(\Bbbk G,V)\simeq \Bbbk G^*\otimes_\Bbbk V\xrightarrow{\sim}\Bbbk G\otimes_\Bbbk V\,,$$

который переводит разложимый оператор $\varphi=\xi\otimes_\Bbbk v:\ g\mapsto\xi(g)\,v$ ранга 1 в оператор

$$\hat\xi\otimes_\Bbbk v=\frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G}\xi(g^{-1})\,g\otimes_\Bbbk v=\frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G}g\otimes_\Bbbk(\xi(g^{-1})\,v)=\frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G}g\otimes_\Bbbk\varphi(g^{-1})$$

и, стало быть, действует на произвольный линейный оператор $\varphi:\ \Bbbk G\to V$ по правилу

$$\varphi\mapsto\widehat{\varphi}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G}g^{-1}\otimes_\Bbbk\varphi(g)\,.$$

[1] Тензорные произведения в левой и правой частях суть описанные в n° 2.1 на стр. 13 тензорные произведения представлений групп H и G соответственно.

[2] См. форм. (3-25) на стр. 31.

Оператор $\widehat{\varphi}$ называется *преобразованием Фурье* оператора φ. Преобразование Фурье перестановочно с левым действием G, ибо для всех $s \in G$

$$\widehat{s\varphi} = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} g^{-1}\otimes s\varphi(g) = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} g^{-1}\otimes \varphi(gs) = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} sg^{-1}\otimes \varphi(g) = s\widehat{\varphi}\,,$$

а его композиция с проекцией $\Bbbk G\otimes_{\Bbbk} V \twoheadrightarrow \Bbbk G\otimes_{\Bbbk H} V$ устанавливает изоморфизм подпространства $\operatorname{Hom}_H(\Bbbk G, V)\subset \operatorname{Hom}(\Bbbk G, V)$ с индуцированным G-модулем $\operatorname{ind} V = \Bbbk G\otimes_{\Bbbk H} V$.

Упражнение 4.10. Докажите последнее утверждение.

Таким образом, индуцированное и коиндуцированное представления конечной группы канонически изоморфны друг другу посредством преобразования Фурье.

4.4. Целые элементы в расширениях колец. Покажем, что следующие три свойства элемента $b\in B$ в расширении коммутативных колец $A\subset B$ с общей единицей эквивалентны друг другу:

(1) b является корнем приведённого многочлена из $A[x]$

(2) A-линейная оболочка всех целых неотрицательных степеней b^m линейно порождается над A конечным числом элементов

(3) существует такой конечно порождённый A-подмодуль $M\subset B$, что $bM\subset M$ и M не аннулируется умножением ни на какой ненулевой элемент[1] из B.

Элементы $b\in B$, обладающие этими свойствами, называются *целыми* над A.

В самом деле, свойство (1) равносильно тому, что некоторая степень элемента b линейно выражается через меньшие степени с коэффициентами из A, т. е.

$$b^m = a_1\, b^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\, b + a_m$$

для некоторых $m\in\mathbb{N}$ и $a_1,\ldots,a_m\in A$, откуда сразу следует свойство (2). Если выполнено свойство (2), то A-линейная оболочка всех целых неотрицательных степеней элемента b удовлетворяет свойству (3), поскольку конечно порождена и содержит единицу $b^0 = 1$. Ну а если выполняется свойство (3), и элементы $e_1,\ldots,e_m\in M$ линейно порождают M над A, то A-линейный оператор умножения на b: $M\to M$, $m\mapsto bm$, действует на эти образующие по правилу

$$(be_1, be_2, \ldots, be_m) = (e_1,\ldots,e_m)\cdot Y\,, \tag{4-8}$$

где $Y\in \operatorname{Mat}_m(A)$ — квадратная матрица с элементами из A. Из тождества $\det X\cdot E = X\cdot X^{\vee}$, где X — произвольная квадратная матрица, E — единичная матрица того же размера, а $X^{\vee}$ — присоединённая к X матрица[2], вытекает, что образ оператора умножения на $\det X$ содержится в линейной оболочке столбцов матрицы X. Поэтому модуль $\det(bE-Y)\,M$ содержится в линейной оболочке векторов $(e_1,\ldots,e_m)\cdot(bE-Y)$, нулевой в силу соотношения (4-8). Из равенства $\det(bE-Y)\,M = 0$ и B-точности модуля M вытекает, что $\det(bE-Y)=0$. Так как все элементы матрицы Y лежат в A, её характеристический многочлен $\chi_Y(x) = \det(xE-Y)$ лежит в $A[x]$. Он приведён, и b является его корнем.

[1] Такие модули называются *B-точными* (по-английски *faithful*).

[2] Т. е. транспонированная к матрице алгебраических дополнений элементов матрицы X, см. раздел 8.4 на с. 138 лекций [Алг 1].

Определение 4.1 (целое замыкание)
Множество всех целых над A элементов кольца $B \supset A$ называется *целым замыканием* подкольца A в B. Если оно совпадает с A, кольцо A называется *целозамкнутым* в B. Если оно совпадает с B, кольцо B называется *целым расширением* кольца A или *целой A-алгеброй*.

Пример 4.3 (целозамкнутость факториального кольца в поле частных)
Покажем, что каждое факториальное[1] кольцо A целозамкнуто в своём поле частных[2] $Q_A \supset A$. Если многочлен $a_0 t^m + \ldots + a_{m-1} t + a_m \in A[t]$ аннулирует дробь $p/q \in Q_A$ с нод$(p,q) = 1$, то $a_0 p^m + a_1 q p^{m-1} + \ldots + a_{m-1} q^{m-1} p + a_m q^m = 0$, откуда $q \mid a_0$, и если $a_0 = 1$, то q обратим, и $p/q \in A$. В частности, кольцо $\mathbb{Z}$ целозамкнуто в поле $\mathbb{Q}$, а кольцо $\Bbbk[x]$, где $\Bbbk$ — любое поле, целозамкнуто в поле $\Bbbk(x)$.

Пример 4.4 (инварианты действия конечной группы)
Если конечная группа G действует на кольце B кольцевыми автоморфизмами, то B цело над *подкольцом инвариантов* $B^G \stackrel{\text{def}}{=} \{ a \in B \mid ga = a \ \ \forall\, g \in G \}$, поскольку каждый элемент $b \in B$ является корнем приведённого многочлена $B(t) = \prod_{\beta \in Gb} (t - \beta)$, где произведение берётся по всем различным элементам β из G-орбиты Gb элемента b, и коэффициенты этого многочлена, будучи симметрическими многочленами от элементов G-орбиты, G-инвариантны.

Предложение 4.5
Целое замыкание любого подкольца $A \subset B$ является подкольцом в B. В любом расширении колец $C \supset B$ всякий элемент $c \in C$, целый над целым замыканием A в B, цел и над A.

Доказательство. Если элементы $p, q \in B$ таковы, что

$$p^m = x_1\, p^{m-1} + \ldots + x_{m-1}\, p + x_m \quad \text{и} \quad q^n = y_1\, q^{n-1} + \ldots + y_{n-1}\, q + y_n$$

для некоторых $x_\nu, y_\mu \in A$, то произведения $p^i q^j$ с $0 \leqslant i \leqslant m-1$ и $0 \leqslant j \leqslant n-1$ порождают A-модуль, который выдерживает умножение и на p, и на q, а значит, и на $p+q$, и на pq. Поскольку он содержит единицу, его нельзя аннулировать умножением ни на какой элемент из B. Аналогично, если $z_0^r = z_1 z_0^{r-1} + \ldots + z_{r-1} z_0 + z_r$, где каждый z_k с $k > 0$ удовлетворяет равенству

$$z_k^{m_k} = a_{k,1}\, z_k^{m_k - 1} + \ldots + a_{k,m_k - 1}\, z_k + a_{k,m_k}$$

для некоторых $a_{k,\ell} \in A$, то умножение на элемент z_0 переводит в себя A-линейную оболочку всех произведений $z_0^{j_0} z_1^{j_1} \ldots z_r^{j_r}$, где $0 \leqslant j_0 \leqslant r-1$ и $0 \leqslant j_k \leqslant m_k - 1$ при $k > 0$. □

Следствие 4.3 (лемма Гаусса – Кронекера – Дедекинда)
Для любого расширения колец $A \subset B$ и произвольных приведённых многочленов $f, g \in B[x]$ положительной степени все коэффициенты произведения $f(x)g(x)$ целы над A, если и только если все коэффициенты обоих многочленов $f(x)$ и $g(x)$ целы над A.

Доказательство. Если коэффициенты многочленов f и g целы над A, то коэффициенты их произведения $h = fg$ тоже целы над A, поскольку целые элементы образуют кольцо. Чтобы показать обратное, рассмотрим какое-нибудь кольцо $C \supset B$, над которым f и g полностью разлага-

[1] См. раздел 4.4 на с. 74 лекций [Алг 1].
[2] См. раздел 3.1 на с. 55 лекций [Алг 1].

ются на линейные множители[1], т. е. $f(x) = \prod(x - \alpha_\nu)$ и $g(x) = \prod(x - \beta_\mu)$ в $C[x]$ для некоторых $\alpha_\nu, \beta_\mu \in C$. Если все коэффициенты многочлена $h(x) = \prod(x - \alpha_\nu)\prod(x - \beta_\mu)$ целы над A, то все его корни α_ν и β_μ целы над целым замыканием A в C, а значит, и над самим A. Поскольку коэффициенты многочленов f и g являются многочленами от α_ν и β_μ, они тоже целы над A. □

Упражнение 4.11. Пусть кольцо B цело над подкольцом $A \subset B$. Покажите, что если B — поле, то и A поле, и наоборот, если A — поле, и в B нет делителей нуля, то B — поле.

Пример 4.5 (целые алгебраические числа)
Пусть поле $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ конечномерно как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Элементы таких полей называются *алгебраическими числами*. По предл. 4.5 целые над $\mathbb{Z}$ алгебраические числа образуют в поле $\mathbb{K}$ подкольцо. Оно называется *кольцом целых* поля $\mathbb{K}$ и обозначается $\mathcal{O}_\mathbb{K}$. Если число $\vartheta \in \mathcal{O}_\mathbb{K}$ является корнем приведённого многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]$, то f делится в $\mathbb{Q}[x]$ на минимальный многочлен[2] $\mu_\vartheta \in \mathbb{Q}[x]$ числа ϑ над $\mathbb{Q}$. По сл. 4.3 коэффициенты многочлена μ_ϑ целы над $\mathbb{Z}$, а поскольку $\mathbb{Z}$ целозамкнуто в $\mathbb{Q}$, они лежат в $\mathbb{Z}$. Мы заключаем, что минимальный над полем $\mathbb{Q}$ многочлен целого алгебраического числа имеет целые коэффициенты. Характеристический многочлен[3] $\chi_\vartheta \in \mathbb{Q}[x]$ оператора умножения $\vartheta\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \vartheta x$, на алгебраическое число $\vartheta \in \mathbb{K}$ имеет в поле $\mathbb{C}$ те же корни, что и минимальный многочлен[4] μ_ϑ. Если $\vartheta \in \mathcal{O}_\mathbb{K}$, то $\mu_\vartheta \in \mathbb{Z}[x]$, и стало быть, все эти корни целы над $\mathbb{Z}$. Поэтому все коэффициенты характеристического многочлена целого алгебраического числа целы над $\mathbb{Z}$ и, будучи рациональными числами, лежат в $\mathbb{Z}$. В частности определитель $\det\vartheta$ и след $\operatorname{tr}\vartheta$ оператора умножения на целое алгебраическое число $\vartheta \in \mathcal{O}_\mathbb{K}$ лежат в $\mathbb{Z}$. Они называются *нормой* и *следом* алгебраического числа ϑ и обозначаются $N(\vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \det\vartheta$ и $\operatorname{Sp}(\vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\vartheta$. Отметим, что $N(\vartheta_1\vartheta_2) = N(\vartheta_1)N(\vartheta_2)$, и $\operatorname{Sp}(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \operatorname{Sp}(\vartheta_1) + \operatorname{Sp}(\vartheta_2)$.

Поскольку целые неотрицательные степени ξ^m любого числа $\xi \in \mathbb{K}$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}$, каждое алгебраическое число ξ удовлетворяет уравнению $a_0\xi^n + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n = 0$ с коэффициентами $a_i \in \mathbb{Z}$ и $n = \dim_\mathbb{Q}\mathbb{K}$. Так как число $\zeta = a_0\xi$ удовлетворяет уравнению

$$\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + a_0a_2\zeta^{n-2} + \ldots + a_0^{n-1}a_n = 0\,,$$

оно цело над $\mathbb{Z}$, т. е. подходящее целое кратное любого алгебраического числа цело над $\mathbb{Z}$. Мы заключаем, что каждое конечномерное над $\mathbb{Q}$ поле $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ является полем частных своего кольца целых $\mathcal{O}_\mathbb{K}$, и для любого базиса $e_1, \ldots, e_d$ поля $\mathbb{K}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что все $me_i \in \mathcal{O}_\mathbb{K}$. Таким образом, поле $\mathbb{K}$ имеет над $\mathbb{Q}$ базис из целых алгебраических чисел. Целые алгебраические числа образуют модуль над кольцом $\mathbb{Z}$. Покажем, что он изоморфен $\mathbb{Z}^n$, где $n = \dim_\mathbb{Q}\mathbb{K}$. Для этого рассмотрим *билинейную форму следа* $\operatorname{sp}\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{Q}$, значение которой на элементах $\xi, \vartheta \in \mathbb{K}$ равно следу $\operatorname{tr}(\xi\vartheta)$ оператора умножения на $\xi\vartheta$:

$$\xi\vartheta\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}\,,\ x \mapsto \xi\vartheta x\,.$$

[1] Кольцо $C \supset B$, над которым заданный приведённый многочлен $f \in B[x]$ полностью раскладывается на линейные множители, строится индукцией по $\deg f$, как в доказательстве теоремы 1 на с. 46 лекций [Алг1]. Если $\deg f > 0$, то B вкладывается в фактор кольцо $F = B[x]/(f)$ как подкольцо, образованное классами констант. В кольце F многочлен f имеет корень $\gamma = x \pmod f$. Поэтому $f(x) = (x - \gamma)\cdot f_1(x)$, где $f_1 \in F[x]$ тоже приведён и $\deg f_1 < \deg f$. По индукции, $f_1 = \prod(x - \gamma_i)$ для подходящих элементов γ_i из подходящего расширения $C \supset F \supset B$.

[2] Т. е. приведённый многочлен наименьшей степени с коэффициентами в $\mathbb{Q}$, зануляющийся на элементе ϑ, см. раздел 5.7.2 на с. 72 лекций [Гео 1].

[3] См. раздел 9.1.4 на с. 146 лекций [Алг 1].

[4] См. разделы 9.1.4-9.1.5 на с. 146-147 лекций [Алг 1].

Упражнение 4.12. Убедитесь, что форма sp симметрична и невырождена[1].

Пусть целые элементы $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ образуют базис поля $\mathbb{K}$ над $\mathbb{Q}$, а $e_1^\times, \dots, e_n^\times \in \mathbb{K}$ — двойственный к нему базис относительно формы следа[2]. Произвольный элемент $\vartheta \in \mathbb{K}$ раскладывается по второму базису как[3] $\vartheta = \sum_{i=1}^n \operatorname{sp}(e_i, \vartheta) e_i^\times$. Так как $e_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ и для любого $\vartheta \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ след произведения $\vartheta e_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ лежит в $\mathbb{Z}$, мы заключаем, что $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ содержится в свободном $\mathbb{Z}$-модуле с базисом $e_1^\times, \dots, e_n^\times$. Поэтому $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ тоже является сводным модулем ранга не выше[4] n. А так как векторы $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, а значит, и над $\mathbb{Z}$, ранг $\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{K}} = n$.

Обратите внимание, что всякий базис модуля $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ над $\mathbb{Z}$ одновременно является базисом векторного пространства $\mathbb{K}$ над $\mathbb{Q}$, и умножение на любой элемент $\vartheta \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ записывается в этом базисе целочисленной матрицей. Именно так целые алгебраические числа и были впервые определены Дедекиндом в XIX веке: как числа $\vartheta \in \mathbb{K}$, умножение на которые записывается целочисленной матрицей в подходящем базисе поля $\mathbb{K}$ над $\mathbb{Q}$.

Упражнение 4.13. Опишите кольца целых чисел в полях
а) $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \mathbb{Q}[x]/(x^2-5)$ б) $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$ в) $\mathbb{Q}[\omega] = \mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$.

4.5. Целость характеров комплексных представлений. Пусть G — конечная группа. Значение характера χ_ϱ любого комплексного конечномерного представления ϱ группы G на любом элементе $g \in G$ цело над $\mathbb{Z}$ в силу того, что оператор $\varrho(g)$ аннулируется многочленом $t^{|G|} - 1$, все корни которого целы над $\mathbb{Z}$, а значение $\chi_\varrho(g)$ равно сумме некоторых из этих корней[5].

Теорема 4.2
Размерности всех комплексных неприводимых конечномерных линейных представлений конечной группы G делят индекс $[G : A]$ любой её нормальной абелевой подгруппы[6] $A \lhd G$.

Доказательство. Пусть $\varrho : \mathbb{C}G \to \operatorname{End} W$ — неприводимое комплексное представление. Сначала докажем теорему для единичной подгруппы $A = \{e\}$, т. е. покажем, что $\dim W$ делит $|G|$. В силу прим. 4.3 достаточно убедиться, что рациональное число $|G| / \dim W$ цело над $\mathbb{Z}$. Так как представление ϱ неприводимо, скалярный квадрат его характера равен единице:

$$1 = (\chi_\varrho, \chi_\varrho) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} \varrho(g^{-1}) \cdot \operatorname{tr} \varrho(g)\,. \tag{4-9}$$

Функция $g \mapsto \operatorname{tr} \varrho(g^{-1})$ постоянна на классах сопряжённости, и её значения целы над $\mathbb{Z}$. Обозначим через $\tau(K) \in \mathbb{C}$ её значение на классе $K \in \operatorname{Cl}(G)$ и перепишем (4-9) как

$$\frac{|G|}{\dim W} = \frac{1}{\dim W} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} \varrho(g^{-1}) \cdot \operatorname{tr} \varrho(g) = \sum_{K \in \operatorname{Cl} G} \frac{\tau(K)}{\dim W} \operatorname{tr} \sum_{g \in K} \varrho(g)\,.$$

[1] См. раздел 13.2 на с. 173 лекций [Гео 1].
[2] Это означает, что $\operatorname{sp}(e_i, e_j^\times) = \delta_{ij}$, см. раздел 13.2.1 на с. 175 лекций [Гео 1].
[3] Ср. с формулой 13.2 на с. 175 лекций [Гео 1].
[4] См. теорему 6.2 на с. 111 лекций [Алг 1].
[5] Напомню, что собственные числа оператора содержатся среди корней любого аннулирующего этот оператор многочлена, см. раздел 9.1.5 на с. 147 лекций [Алг 1].
[6] Включая единичную подгруппу $\{e\}$ — в этом случае теорема тоже содержательна.

Достаточно проверить, что каждое из чисел

$$\frac{1}{\dim W}\ \mathrm{tr}\sum_{g\in K}\varrho(g)=\frac{\mathrm{tr}\,\varrho(g_K)}{\dim W}\,,\quad\text{где}\quad g_K\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{g\in K}g\in Z_{\mathbb{Z}G}\,,$$

цело над $\mathbb{Z}$. Неприводимое представление ϱ переводит конечно порождённый $\mathbb{Z}$-модуль центральных элементов подкольца $\mathbb{Z}G\subset\mathbb{C}G$ в конечно порождённый $\mathbb{Z}$-подмодуль кольца $\operatorname{End}W$. По лемме Шура все элементы последнего подмодуля являются скалярными гомотетиями, ибо перестановочны со всеми элементами группы. Коэффициенты этих гомотетий образуют конечно порождённый $\mathbb{Z}$-подмодуль в $\mathbb{C}$, выдерживающий умножение на каждый из коэффициентов. Следовательно, все эти коэффициенты целы над $\mathbb{Z}$. Но коэффициент гомотетии $\varrho(g_K)$ как раз и равен $\mathrm{tr}\,\varrho(g_K)/\dim W$. Итак, $|G|/\dim W\in\mathbb{Z}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $A=Z_G$ является центром группы G, т. е. покажем, что рациональное число $q=[G:Z_G]/\dim W$ тоже цело над $\mathbb{Z}$. Для этого достаточно убедиться, что все его натуральные степени q^n лежат в конечно порождённом $\mathbb{Z}$-подмодуле поля $\mathbb{Q}$. Рассмотрим действие группы $G^n=G\times\ldots\times G$ на $W^{\otimes n}$ по правилу

$$(g_1,\ldots,g_n)\colon w_1\otimes\ldots\otimes w_n\mapsto\varrho(g_1)w_1\otimes\ldots\otimes\varrho(g_n)w_n\,.$$

По теор. 4.1 на стр. 35 это внешнее тензорное произведение одинаковых неприводимых представлений группы G неприводимо. Подгруппа $C\subset G^n$, состоящая из таких элементов $(c_1,\ldots,c_n)$, что все $c_i\in Z_G$ и произведение $c_1\ldots c_n=1$, содержится в ядре этого представления, поскольку по лемме Шура каждый центральный элемент c_i действует в неприводимом представлении ϱ умножением на некоторую константу, и произведение этих констант равно единице в силу равенства $\prod\varrho(c_i)=\varrho(c_1\ldots c_n)=\varrho(1)=1$. Подгруппа C имеет порядок $|Z_G|^{n-1}$ и нормальна, поскольку лежит в центре группы G^n. Таким образом, пространство $W^{\otimes n}$ размерности $\dim^n W$ является неприводимым представлением фактор группы G^n/C порядка $|G|^n/|Z_G|^{n-1}$. По уже доказанному

$$\frac{|G|^n}{(\dim W)^n|Z_G|^{n-1}}=|Z_G|\cdot q^n\in\mathbb{Z}\,.$$

Тем самым, все степени q^n лежат в $\mathbb{Z}$-модуле $|Z_G|^{-1}\,\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ ранга 1.

Наконец, рассмотрим произвольную нормальную абелеву подгруппу $A\lhd G$ и изотипное разложение $\mathrm{res}_A W=\bigoplus W_\chi$ ограничения представления ϱ на A. Каждая изотипная компонента W_χ является прямой суммой одномерных представлений абелевой группы A, отвечающих некоторому мультипликативному характеру[1] $\chi\colon A\to\mathbb{C}^*$, т. е. $aw=\chi(a)w$ для всех $a\in A$ и $w\in W_\chi$. Поскольку подгруппа A нормальна в G, группа G действует на её мультипликативных характерах: элемент $g\in G$ переводит характер $\chi\colon A\to\mathbb{C}^*$ в композицию $\chi^g=\chi\circ\mathrm{Ad}_{g^{-1}}$, принимающую на элементах $a\in A$ значения $\chi^g(a)=\chi(g^{-1}ag)$. Так как для всех $w\in W_\chi$, $a\in A$, $g\in G$

$$agw=gg^{-1}agw=g\chi^g(a)w=\chi^g(a)gw\,,$$

в представлении ϱ каждый элемент $g\in G$ изоморфно отображает изотипную компоненту W_χ на компоненту W_{χ^g}. Поскольку представление ϱ неприводимо, действие G на изотипных компонентах W_χ транзитивно. Поэтому все компоненты имеют одну и ту же размерность, и она делит $\dim W$. Если компонента ровно одна, все элементы подгруппы A действуют на W скалярно, и образ $\varrho(A)$ лежит в центре $Z_{\varrho(G)}$ образа всего представления. По уже доказанному индекс

[1] См. n° 2.4 на стр. 20.

центра $[\varrho(G) : Z_{\varrho(G)}]$ делится на $\dim W$. Но этот индекс делит индекс $[\varrho(G) : \varrho(A)]$ центральной подгруппы $\varrho(A)$, а последний в свою очередь делит индекс[1] $[G : A]$. Остаётся рассмотреть случай, когда изотипных компонент несколько. Пусть W_χ — одна из них. Обозначим через $H = \{g \in G \mid g(W_\chi) = W_\chi\}$ её стабилизатор в G. Тогда общее число изотипных компонент равно $[G : H]$, подгруппа $H \subsetneq G$ является собственной, содержит A, и её линейное представление в пространстве W_χ неприводимо.

Упражнение 4.14. Убедитесь в этом.

Применяя индукцию по порядку $|G|$, мы можем считать, что $\dim W_\chi$ делит индекс $[H : A]$. Но тогда и $\dim W = [G : H] \cdot \dim W_\chi$ делит $[G : A] = [G : H] \cdot [H : A]$. □

[1] Ибо гомоморфизм ϱ корректно задаёт эпиморфизм фактор групп $G/A \twoheadrightarrow \varrho(G)/\varrho(A)$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 4.1. Это аналогично доказательству соотношения 3-20 из лем. 3.2 на стр. 30.

Упр. 4.3. По универсальному свойству тензорного произведения $\mathbb{Z}$-модулей $\mathbb{Z}$-билинейное отображение аддитивных абелевых групп $A \times B \to C$, $(a,b) \mapsto \alpha(a)\cdot\beta(b)$, единственным образом понимается до $\mathbb{Z}$-линейного отображения $A \otimes B \to C$, $a \otimes b \mapsto \alpha(a)\cdot\beta(b)$, которое автоматически является гомоморфизмом колец. Утверждение о том, что тензорное произведение колец однозначно задаётся своим универсальным свойством, доказывается стандартно, [1].

Упр. 4.6. Каноническое отображение B-модулей $B \otimes_A A \to B$, ассоциированное с вложением A-модулей $A \hookrightarrow B$, является изоморфизмом для любого расширения $A \subset B$ ассоциативных алгебр с единицами.

Упр. 4.10. Зафиксируем систему представителей $\{g_1, \dots, g_r\}$ смежных классов G/H. Тогда $G = g_1H \sqcup \dots \sqcup g_rH = Hg_1^{-1} \sqcup \dots \sqcup Hg_r^{-1}$, и каждый H-инвариантный оператор $\varphi : \Bbbk G \to V$ однозначно задаётся указанием s векторов $v_\nu = \varphi\left(g_\nu^{-1}\right) \in V$ ибо действует на остальные базисные векторы по правилу $\varphi\left(hg_\nu^{-1}\right) = hv_\nu$. Поэтому

$$\dim \operatorname{Hom}_H(\Bbbk G, V) = [G : H]\cdot \dim V = \dim \Bbbk G \otimes_{\Bbbk H} V\,.$$

Преобразование Фурье от H-инвариантного оператора $\varphi : g_\nu^{-1} \mapsto v_\nu$ равно

$$\frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} g^{-1}\otimes_{\Bbbk H}\varphi(g) = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_\nu \sum\nolimits_{h\in H} g_\nu h^{-1}\otimes_{\Bbbk H}\varphi\left(hg_\nu^{-1}\right) = \frac{|H|}{|G|}\sum\nolimits_\nu g_\nu v_\nu \in \bigoplus\nolimits_\nu g_\nu V$$

и зануляется только когда все $v_\nu = 0$.

Упр. 4.11. Если B — поле, целое над A, то обратный к произвольному ненулевому $a \in A$ элемент $a^{-1} \in B$ удовлетворяет уравнению $a^{-m} = \alpha_1 a^{1-m} + \dots + \alpha_{m-1}a^{-1} + \alpha_0$, где $\alpha_\nu \in A$. Умножая обе части на a^{m-1}, заключаем, что $a^{-1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1}a^{m-2} + \alpha_0 a^{m-1} \in A$. Обратно, если A — поле, и B — целая A-алгебра, то все неотрицательные целые степени b^i любого ненулевого элемента $b \in B$ порождают конечномерное векторное пространство V над полем A. Если в B нет делителей нуля, то линейный оператор $b : V \to V$, $x \mapsto bx$, сюръективен, так как имеет нулевое ядро. Обратный к b элемент b^{-1} является прообразом единицы $1 \in V$.

Упр. 4.12. Первое очевидно, второе вытекает из того, что $\operatorname{sp}(\vartheta, \vartheta^{-1}) = \operatorname{tr}(1) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}$ для любого $\vartheta \neq 0$.

[1] Ср. с с доказательством предложения 13.2 на с. 212 лекций [Алг 1].