§5. Представления симметрических групп.

5.1. Действие S_n на заполненных диаграммах Юнга. Будем называть заполнение клеток диаграммы Юнга λ не повторяющимися числами от 1 до $n = |\lambda|$ (*стандартным*) *заполнением формы* λ и *веса* $n = |\lambda|$. С каждым таким заполнением T связаны *строчная подгруппа* $R_T \subset S_n$, состоящая из всех перестановок чисел $1, \dots, n$, переводящих элементы каждой строки заполнения T в элементы из той же самой строки, и *столбцовая подгруппа* $C_T \subset S_n$, состоящая из всех перестановок, переводящих элементы каждого столбца заполнения T в элементы из того же самого столбца. Таким образом, $R_T \simeq S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ и $C_T \simeq S_{\lambda_1^t} \times \dots \times S_{\lambda_m^t}$, где $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_m^t)$ здесь и далее означает транспонированную к λ диаграмму.

Упражнение 5.1. Убедитесь, что S_n транзитивно действует на стандартных заполнениях фиксированной формы λ и что $R_{gT} = gR_Tg^{-1}$ и $C_{gT} = gC_Tg^{-1}$ для всех $g \in S_n$.

Мы пишем $\lambda \trianglerighteq \mu$ и говорим, что диаграмма λ *доминирует* диаграмму μ, если

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \dots + \mu_k \text{ при всех } k \in \mathbb{N}\,.$$

Мы пишем $\lambda > \mu$, если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ лексикографически больше, чем $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$. Отметим, что диаграмма μ не может доминировать никакую диаграмму $\lambda > \mu$, и что лексикографический порядок является линейным, а доминирование при $n \geqslant 6$ задаёт на множестве n-клеточных диаграмм только частичный порядок.

Упражнение 5.2. Приведите пример двух несравнимых по отношению доминирования диаграмм Юнга.

Лемма 5.1 (ключевая комбинаторная лемма)
Пусть стандартное заполнение T формы λ и стандартное заполнение U формы μ имеют одинаковый вес $|\lambda| = |\mu|$, и диаграмма μ не является строго доминирующей диаграмму λ. Тогда имеет место ровно одна из двух взаимоисключающих возможностей:

- либо найдутся два числа, стоящие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения U
- либо $\lambda = \mu$ и $pT = qU$ для некоторых $p \in R_T$ и $q \in C_U$.

Доказательство. Пусть все элементы каждой из строк заполнения T находятся в разных столбцах заполнения U. Из того, что все элементы первой строки T лежат в разных столбцах U, вытекает неравенство $\lambda_1 \leqslant \mu_1$ и существование перестановки $q_1 \in C_U$, переводящей все элементы из первой строки заполнения T в первую строку заполнения q_1U. Из того, что все элементы второй строки T тоже лежат в разных столбцах U, вытекает существование такой не затрагивающей элементов из первой строки заполнения T перестановки $q_2 \in C_{q_1U} = C_U$, что в заполнении q_2q_1U каждый элемент второй строки заполнения T стоит либо во второй строке, либо в первой[1], что влечёт неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \mu_1 + \mu_2$. Продолжая в том же духе, мы получим последовательность перестановок $q_1, \dots, q_k \in C_U$, где k — количество строк в диаграмме μ, в которой при каждом i перестановка $q_i \in C_{q_{i-1}\dots q_1U} = C_U$ оставляет на месте все элементы из первых $i-1$ строк заполнения T, а все элементы из i-той строки заполнения T переводит внутрь i верхних строк заполнения $q_iq_{i-1}\dots q_1U$. В частности, при каждом i будет выполнено

[1] Последнее происходит, когда этот элемент изначально находится в столбце высоты 1.

неравенство $\lambda_1 + \ldots + \lambda_i \leqslant \mu_1 + \ldots + \mu_i$, что по условию леммы возможно только при $\lambda = \mu$. Но тогда каждая перестановка q_i переводит элементы i-той строки заполнения T в точности в i-тую строку заполнения $q_i \ldots q_1 U$. Поэтому $q_k \ldots q_1 U = pT$ для некоторого $p \in R_T$. □

Следствие 5.1
Перестановка $g \in S_n$ тогда и только тогда имеет вид $g = pq$ для некоторых $p \in R_T$, $q \in C_T$, когда никакие два элемента из одной строки T не лежат в одном столбце gT, и в этом случае представление перестановки $g \in S_n$ в виде $g = pq$ с $p \in R_T$ и $q \in C_T$ единственно.

Доказательство. Для любых $p \in R_T$ и $q \in C_T$ элементы из одной строки заполнения T лежат в разных столбцах заполнения qT, и p переставляет эти элементы между собою, оставляя их лежать в разных столбцах заполнения pqT. Наоборот, если никакие два элемента из одной строки заполнения T не лежат в одном столбце заполнения $U = gT$, то по лем. 5.1 найдутся такие $p \in R_T$ и $q' \in C_U$, что $pT = q'U = q'gT$. Поэтому $p = q'g$. Записывая перестановку $q' \in C_{gT} = gC_T g^{-1}$ в виде gqg^{-1}, где $q \in C_T$, получаем $g = pq^{-1}$, как и требовалось. Единственность разложения $g = pq$ вытекает из того, что[1] $R_T \cap C_T = \{e\}$. □

Упражнение 5.3. Покажите, что перестановка $g \in S_n$ имеет вид $g = q'p'$ для некоторых $q' \in C_T$, $p' \in R_T$, если и только если никакие два элемента из одной строки gT не лежат в одном столбце T, и в этом случае представление $g = q'p'$ тоже единственно.

5.2. Симметризаторы Юнга. Лежащие в групповой алгебре $\mathbb{C}S_n$ элементы

$$r_T = \sum\nolimits_{\sigma \in R_T} \sigma\,, \quad c_T = \sum\nolimits_{\sigma \in C_T} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\,, \tag{5-1}$$

$$s_T = r_T c_T = \sum\nolimits_{p \in R_T} \sum\nolimits_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) pq \tag{5-2}$$

называются, соответственно, *строчным*, *столбцовым* и *полным симметризаторами Юнга*.

Пример 5.1
Для однострочного заполнения $T = \boxed{1}\boxed{2}\cdots\boxed{n}$ получаем $R_T = S_n$, $C_T = e$, $c_T = 1$, а

$$s_T = r_T = \operatorname{sym}_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \sigma = \pi_{\mathbb{1}}$$

является проектором на тривиальный изотипный идеал в $\mathbb{C}S_n$. Аналогично, для одностолбцового заполнения

$$T = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$$

получаем $R_T = e$, $C_T = S_n$, $r_T = 1$, а

$$s_T = c_T = \operatorname{alt}_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \sigma = \pi_{\operatorname{sgn}}$$

является проектором на знаковый изотипный идеал в $\mathbb{C}S_n$. Для заполнения

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \tag{5-3}$$

[1] См. раздел 11.3 на с. 194 лекций [Алг 1].

получаем

$$r_T = e + |1,3\rangle\,, \quad c_T = e - |1,2\rangle\,, \quad s_T = e - |1,2\rangle + |1,3\rangle - |1,2,3\rangle\,.$$

Обратите внимание, что $s_T^2 = 3s_T$ (проверьте!).

Упражнение 5.4. Убедитесь, что S_3-орбита симметризатора s_T заполнения (5-3) линейно порождает в $\mathbb{C}S_3$ двумерное инвариантное подпространство, на котором S_3 действует группой треугольника.

5.2.1. Неприводимые левые идеалы. Прямо из определений (5-1) – (5-2) вытекают следующие очевидные свойства симметризаторов Юнга:

$$\forall g \in S_n \quad r_{gT} = g r_T g^{-1}\,, \quad c_{gT} = g c_T g^{-1} \quad \text{и} \quad s_{gT} = g s_T g^{-1} \tag{5-4}$$

$$\forall p \in R_T\ p r_T = r_T p = r_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T\ \operatorname{sgn}(q) q c_T = \operatorname{sgn}(q) c_T q = c_T \tag{5-5}$$

$$\forall p \in R_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \quad \operatorname{sgn}(q) p s_T q = s_T\,. \tag{5-6}$$

Замечательно, что полный симметризатор $s_T \in \mathbb{C}S_n$ однозначно с точностью до пропорциональности *определяется* свойством (5-6).

Лемма 5.2
Векторное подпространство $E_T = \{f \in \mathbb{C}S_n \,|\, \forall p \in R_T\ \forall q \in C_T\ \operatorname{sgn}(q)\, pfq = f\}$ одномерно и линейно порождается симметризатором s_T.

Доказательство. Пусть $f = \sum_{g\in S_n} x_g g \in E_T$. Покажем, что $f = x_e s_T$. Условие $\operatorname{sgn}(q)\, pfq = f$ означает, что $x_{pgq} = \operatorname{sgn}(q) x_g$ для всех $g \in S_n$, $p \in R_T$ и $q \in C_T$. Полагая $g = e$, заключаем, что $x_{pq} = \operatorname{sgn}(q) x_e$ и $f = x_e s_T + \sum_{g\notin R_T C_T} x_g g$. Остаётся убедиться, что в последней сумме все $x_g = 0$. Если $g \notin R_T C_T$, то по сл. 5.1 найдутся два элемента, лежащие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения gT. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит и в R_T, и в $C_{gT} = gC_T g^{-1}$. Из второго вытекает, что $g^{-1}\tau g \in C_T$. Полагая $p = \tau$, $q = g^{-1}\tau g$ в равенстве $x_{pgq} = \operatorname{sgn}(q) x_g$, получаем $x_g = -x_g$, откуда $x_g = 0$. □

Лемма 5.3
Имеют место равенства $s_T \mathbb{C}S_n\, s_T = \mathbb{C}\, s_T$ и $s_T^2 = n_\lambda s_T$, где число $n_\lambda = n!\,/\dim\left(\mathbb{C}S_n\, s_T\right)$ рационально, положительно и зависит только от формы $\lambda = \lambda(T)$ заполнения T.

Доказательство. Из равенств (5-5) – (5-6) вытекает, что при любом $f \in \mathbb{C}S_n$ элемент $s_T f s_T$ обладает свойством (5-6) и тем самым лежит в одномерном пространстве $E_T = \mathbb{C}\, s_T$. В частности, $s_T^2 = n_T s_T$ для некоторого $n_T \in \mathbb{C}$. Чтобы найти n_T, вычислим двумя способами след оператора $\mathbb{C}S_n \to \mathbb{C}S_n$ правого умножения на элемент s_T : $f \mapsto f s_T$. С одной стороны, из формулы (5-2) вытекает[1], что для любого $g \in S_n$ коэффициент при g у произведения $g s_T$ равен единице, откуда $\operatorname{tr}(s_T) = |S_n| = n!$. С другой стороны, левый идеал $\mathbb{C}S_n\, s_T$ является S_n-подмодулем левого регулярного представления S_n. Так как последнее вполне приводимо, существует такой S_n-подмодуль $W \subset \mathbb{C}S_n$, что $\mathbb{C}S_n = W \oplus \mathbb{C}S_n\, s_T$. Правое умножение на s_T переводит $W \subset \mathbb{C}S_n$ внутрь $\mathbb{C}S_n\, s_T$, а на идеале $\mathbb{C}S_n\, s_T$ действует как умножение на n_T. Поэтому $\operatorname{tr}(s_T) = n_T \dim(\mathbb{C}S_n\, s_T)$. Следовательно, число $n_T = n!\,/\dim(\mathbb{C}S_n\, s_T)$ рационально и положительно. Наконец, из равенства

[1] Так как $R_T \cap C_T = \{e\}$, все слагаемые в сумме (5-2) являются *различными* элементами группы S_n, взятыми со знаком ± 1, причём элемент $e = ee$ берётся с плюсом.

$s_{gT} = g s_T g^{-1}$ вытекает, что $s_{gT}^2 = g s_T^2 g^{-1} = n_T g s_T g^{-1} = n_T s_{gT}$. Поэтому число $n_T = n_{\lambda(T)}$ зависит только от формы $\lambda = \lambda(T)$ заполнения T. □

Лемма 5.4
Если форма стандартного заполнения T лексикографически больше, чем форма стандартного заполнения U, то $r_T \mathbb{C}S_n\, c_U = c_U \mathbb{C}S_n\, r_T = s_T \mathbb{C}S_n\, s_U = 0$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что $r_T g c_U = c_U g r_T = 0$ для всех $g \in S_n$. Пусть для начала $g = e$. По лем. 5.1 какие-то два элемента из одной строки заполнения T лежат в одном столбце заполнения U. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит как в R_T, так и в C_U. Поэтому $r_T c_U = (r_T\tau)c_U = r_T(\tau c_U) = -r_T c_U$ и $c_U r_T = -(c_U\tau)r_T = -c_U(\tau r_T) = -c_U r_T$, откуда $r_T c_U = c_U r_T = 0$. Теперь и для любого $g \in S_n$ получаем $r_T g c_U = r_T g c_U g^{-1} g = \big(r_T c_{gU}\big)\, g = 0$ и $c_U g r_T = c_U g r_T g^{-1} g = \big(c_U r_{gT}\big)\, g = 0$. □

Теорема 5.1
Представление S_n левыми умножениями в идеале $V_T = \mathbb{C}S_n\, s_T$ неприводимо. Два таких представления V_T и V_U изоморфны тогда и только тогда, когда заполнения T и U имеют одинаковую форму $\lambda = \lambda(T) = \lambda(U)$. Если для каждой n-клеточной диаграммы Юнга λ произвольным образом зафиксировать некоторое стандартное заполнение T_λ, то неприводимые представления $V_\lambda = V_{T_\lambda}$ составят полный список попарно неизоморфных неприводимых представлений S_n.

Доказательство. Пусть $W \subset V_T$ является S_n-инвариантным подмодулем. Перестановочный с левым умножением на S_n проектор $\pi_W : \mathbb{C}S_n \twoheadrightarrow W$ представляет собой оператор правого умножения на элемент $w = \pi_W(1) \in W$, поскольку $\pi_W(x) = x\pi_W(1) = xw$ для всех $x \in \mathbb{C}S_n$. Так как $s_T W \subset s_T V_T = s_T \mathbb{C}S_n\, s_T = \mathbb{C}\, s_T$, для левого действия элемента s_T на подмодуле W имеются ровно две возможности: либо $s_T W = 0$, либо $s_T W = \mathbb{C}\, s_T$. В первом случае $WW \subset V_T W = \mathbb{C}S_n\, s_T W = 0$, откуда $w^2 = 0$, а значит, и $W = 0$, поскольку правое умножение на w тождественно действует на $W = \mathbb{C}S_n\, w$. Во втором случае $s_T \in s_T W \subset W$, откуда $V_T = \mathbb{C}S_n\, s_T \subset W$, т. е. $W = V_T$. Таким образом, модуль V_T неприводим. Если заполнения T и U имеют разные формы — скажем, форма заполнения T лексикографически больше формы заполнения U, то по лем. 5.4 левое умножение на s_T аннулирует модуль V_U, тогда как на модуле V_T оно, согласно лем. 5.3, действует нетривиально: элемент $s_T \in V_T$ является собственным вектором левого умножения на s_T с ненулевым собственным значением $n_{\lambda(T)}$. Так как число попарно неизоморфных неприводимых представлений V_{T_λ} равно числу классов сопряжённости в S_n, мы получаем последнее утверждение теоремы. Если заполнение U имеет ту же форму λ, что и T_λ, то неприводимое представление V_U, будучи не изоморфным ни одному из представлений V_{T_μ} с $\mu \neq \lambda$, изоморфно именно представлению V_{T_λ}. □

5.2.2. Симметризаторы $s'_T = c_T r_T$. Множества $R_T C_T$ и $C_T R_T$, вообще говоря, различны. Например, для стандартного заполнения $T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ цикл $|132\rangle = |12\rangle \circ |13\rangle$ входит в $R_T C_T$ и не входит в $C_T R_T$, а цикл $|123\rangle = |13\rangle \circ |12\rangle$, наоборот, входит в $C_T R_T$ и не входит в $R_T C_T$. Поэтому перестановка сомножителей в симметризаторе $s_T = r_T c_T$ даёт *другой* симметризатор

$$s'_T = c_T r_T = \sum\nolimits_{p \in R_T} \sum\nolimits_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q)\, qp\,, \tag{5-7}$$

получающийся применением к $s_T \in \mathbb{C}S_n$ *антиподального антиавтоморфизма*

$$\alpha : \mathbb{C}S_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}S_n\,, \quad \sum\nolimits_{g \in G} x_g g \mapsto \sum\nolimits_{g \in G} x_g g^{-1}\,, \tag{5-8}$$

который оборачивает порядок сомножителей в произведениях, но переводит в себя строчный и столбцовый симметризаторы r_T и c_T.

Упражнение 5.5. Сформулируйте и докажите для s'_T аналог форм. (5-6) на стр. 50, а также аналоги лем. 5.2 – лем. 5.4 и теор. 5.1 на стр. 51.

Предложение 5.1
Представления S_n левыми умножениями в идеалах $V_T = \mathbb{C}S_n\, s_T$ и $V'_T = \mathbb{C}S_n\, s'_T$ изоморфны.

Доказательство. Правые умножения на c_T и r_T задают гомоморфизмы левых S_n-модулей

$$V'_T = \mathbb{C}S_n\, c_T r_T \underset{xr_T \leftarrow\!\shortmid x}{\overset{x \mapsto xc_T}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}S_n\, r_T c_T = V_T$$

Композиция $x \mapsto xr_Tc_T = xs_T$ действует на $V_T = \mathbb{C}S_n\, s_T$ умножением на ненулевую константу $n_{\lambda(T)}$. Таким образом, операторы правого умножения на $n_\lambda^{-1/2} c_T$ и $n_\lambda^{-1/2} r_T$ являются взаимно обратными изоморфизмами представлений. □

Следствие 5.2
Неприводимые представления V_λ и V_{λ^t}, отвечающие транспонированным диаграммам λ и λ^t, получаются друг из друга тензорным умножением на одномерное знаковое представление.

Доказательство. Фиксируем какое-либо стандартное заполнение T формы λ и транспонированное заполнение T^t транспонированной диаграммы λ^t. Тогда $R_{T^t} = C_T$, $C_{T^t} = R_T$ и

$$s_{T^t} = \sum\nolimits_{p\in R_T} \sum\nolimits_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(p) qp = \sum\nolimits_{p\in R_T} \sum\nolimits_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(q)\operatorname{sgn}(pq) qp = \sigma\left(s'_T\right),$$

где $\sigma\colon \mathbb{C}S_n \to \mathbb{C}S_n$ обозначает *знаковый автоморфизм* групповой алгебры, действующий на базис из групповых элементов по правилу $g \mapsto \operatorname{sgn}(g) g$. Тензорное произведение представления V_λ на одномерное знаковое представление изоморфно представлению в левом идеале $V'_T = \mathbb{C}S_n\, s'_T$ по правилу $g\colon xs'_T \mapsto \operatorname{sgn}(g) gxs'_T$. Знаковый автоморфизм σ изоморфно отображает пространство этого представления на $V_{\lambda^t} = \mathbb{C}S_n\, s_{T^t}$, превращая действие в левое умножение на $g\colon \sigma(x)s_{T^t} \mapsto g\sigma(x)s_{T^t}$. □

5.3. Модуль таблоидов. Орбита стандартного заполнения T под действием строчной подгруппы R_T называется *таблоидом* формы λ и обозначается через $\{T\}$. Действие симметрической группы на заполнениях $g\colon T \mapsto gT$ корректно спускается до действия $g\colon \{T\} \mapsto \{gT\}$ на таблоидах, так как $gR_TT = gR_Tg^{-1}gT = R_{gT}gT$. Возникающее таким образом перестановочное представление группы S_n на пространстве формальных комплексных линейных комбинаций таблоидов формы λ называется *модулем таблоидов* и обозначается M_λ. Так как таблоиды формы λ биективно соответствуют левым смежным классам $gR_T \in S_n/R_T$ и действие S_n на таблоидах совпадает с действием на смежные классы, модуль таблоидов $M_\lambda = \operatorname{ind}_{R_T}^{S_n} \mathbb{1}$ индуцирован тривиальным одномерным представлением подгруппы $R_T \subset S_n$.

Упражнение 5.6. Покажите, что представление S_n в пространстве M_λ изоморфно представлению S_n левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}S_n\, r_T$.

Характер модуля M_λ обозначается через ψ_λ. Напомню[1], что многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ называется *симметрическим*, если $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ для всех $\sigma \in S_n$. Кольцо симметрических многочленов является свободным $\mathbb{Z}$-модулем с базисом из *мономиальных* симметрических многочленов

$$m_\lambda = (\text{сумма всех } \textit{различных} \text{ мономов из } S_n\text{-орбиты монома } x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}), \tag{5-9}$$

занумерованных диаграммами Юнга $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ из n строк, часть из которых может иметь нулевую длину. Симметрический многочлен $p_k(x_1, \dots, x_n) = x_1^k + \dots + x_n^k$ называется k-м *многочленом Ньютона*. Для каждой диаграммы Юнга $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ мы полагаем

$$p_\mu = p_{\mu_1} \dots p_{\mu_m} = p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n},$$

где $m_i = m_i(\mu)$ означает количество строк длины i в диаграмме[2] μ.

Предложение 5.2
Значение $\psi_\lambda(C_\mu)$ характера модуля таблоидов формы λ на состоящем из всех перестановок циклового типа μ классе сопряжённости $C_\mu \in \mathrm{Cl}(S_n)$ равно коэффициенту при m_λ в разложении многочлена p_μ по мономиальному базису (5-9).

Доказательство. Пусть, как и выше, $m_i = m_i(\mu)$ означает количество строк длины i в диаграмме μ. Тогда

$$p_i(x_1, \dots, x_n)^{m_i} = (x_1^i + \dots + x_n^i)^{m_i} = \sum \frac{m_i!}{\varrho_{i1}! \dots \varrho_{in}!} x_1^{i\varrho_{i1}} \dots x_n^{i\varrho_{in}}$$

где сумма берётся по всем наборам неотрицательных целых чисел $\varrho_{i1}, \dots, \varrho_{in}$ с $\sum_j \varrho_{ij} = m_i$. Таким образом, коэффициент при $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ у многочлена $p_\mu = p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}$ равен

$$\sum_{\varrho_{ij}} m_1! \dots m_n! / \textstyle\prod_{ij} \varrho_{ij}!, \tag{5-10}$$

где суммирование идёт по всем таким наборам целых чисел $\varrho_{ij} \geqslant 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, что

$$\textstyle\sum_j \varrho_{ij} = m_i \quad \text{и} \quad \sum_i i\varrho_{ij} = \lambda_j. \tag{5-11}$$

С другой стороны, согласно установленной в предл. 4.4 на стр. 40 формуле (4-6) для характера индуцированного представления,

$$\psi_\lambda(C_\mu) = [S_n : R_T]\, |C_\mu \cap R_T| / |C_\mu|, \tag{5-12}$$

где $[S_n : R_T] = n! / \prod_j \lambda_j!$, $|C_\mu| = n! / \prod_i i^{m_i} m_i!$, а пересечение $C_\mu \cap R_T$ распадается в объединение непересекающихся классов R_T-сопряжёности D_ϱ, каждый из которых состоит из перестановок циклового типа μ, в которых ϱ_{ij} из m_i циклов длины i заполнены элементами j-той строки из T. Эти классы также нумеруются удовлетворяющими условиям (5-11) наборами неотрицательных целых чисел $\varrho = \{\varrho_{ij}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Стабилизатор перестановки $g \in D_\varrho$ при сопряжении подгруппой R_T равен произведению $\prod \varrho_{ij}!$ перестановок между собой циклов одинаковой длины как единого целого и $\prod i^{m_i}$ циклических сдвигов внутри этих циклов. Тем самым, $|C_\mu \cap R_T| = \sum_\varrho |D_\varrho| = \sum_\varrho \prod_j \lambda_j! / \prod_{ij} i^{m_i} \varrho_{ij}!$. Подставляя всё это в (5-12) и сокращая общие множители числителя и знаменателя, получаем (5-10). □

[1] См. пример 5.17 на с. 98 лекций [Алг 1].
[2] Ср. с упражнением 5.28 на с. 99 лекций [Алг 1].

5.4. Модуль Шпехта. Для каждого заполнения T формы λ рассмотрим в модуле таблоидов M_λ вектор

$$v_T = c_T\{T\} = \sum\nolimits_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(q)\{qT\}\,. \tag{5-13}$$

Поскольку ни при каком $q \in C_T$ никакие два элемента из одного столбца T не могут оказаться в одной строке qT, равенство $q_1T = pq_2T$ невозможно ни при каких $q_1, q_2 \in C_T$ и $p \in R_{q_2T}$, т. е. все слагаемые в правой сумме (5-13) суть *различные* базисные векторы пространства таблоидов M_λ, взятые с коэффициентами ±1. В частности, каждый из векторов v_T отличен от нуля. Линейная оболочка векторов (5-13), полученных из всех возможных заполнений T формы λ, является S_n-подмодулем в M_λ, так как $gv_T = gc_T\{T\} = gc_Tg^{-1}\{gT\} = c_{gT}\{gT\} = v_{gT}$ для всех $g \in S_n$. Этот подмодуль обозначается S_λ и называется *модулем Шпехта*.

Лемма 5.5
Если форма λ заполнения T не является строго доминирующей диаграмму μ, то

$$c_TM_\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \lambda \\ \mathbb{C}v_T & \text{при } \mu = \lambda\,. \end{cases}$$

Доказательство. Если в пересечении $R_U \cap C_T$ имеется хоть одна транспозиция τ, то

$$c_T\{U\} = c_T\{\tau U\} = c_T\tau\{U\} = -c_T\{U\}\,, \tag{5-14}$$

откуда $c_T\{U\} = 0$. Если в условиях нашей леммы такой транспозиции нет, то по лем. 5.1 на стр. 48 заполнения U и T имеют одинаковую форму λ и $pU = qT$ для некоторых $p \in R_U$ и $q \in C_T$. В этом случае $c_T\{U\} = c_T\{pU\} = c_T\{qT\} = c_Tq\{T\} = \operatorname{sgn}(q)c_T\{T\} = \pm v_T$. □

Теорема 5.2
Модуль Шпехта S_λ изоморфен неприводимому представлению V_λ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}S_n\, s_T$, построенному по произвольному заполнению T формы λ.

Доказательство. Покажем сначала, что S_λ неприводим. Пусть имеется разложение $S_\lambda = V \oplus W$ в сумму S_n-подмодулей. Тогда оператор c_T, построенный по заполнению T формы λ, переводит каждое из слагаемых в себя. Так как $c_TS_\lambda \subset c_TM_\lambda = \mathbb{C}v_T$ по лем. 5.5, ненулевой вектор v_T лежит ровно в одном из слагаемых — скажем, в V. Но тогда V содержит и все остальные векторы $v_{gT} = gv_T$, а значит, совпадает с S_λ. При $\mu \neq \lambda$ неприводимые представления S_λ и S_μ не изоморфны: если λ лексикографически меньше μ, то по лем. 5.5 оператор c_T аннулирует подмодуль $S_\mu \subset M_\mu$, а на модуле S_λ действует нетривиально, ибо $c_Tv_T = c_Tc_T\{T\} = |C_T|c_T\{T\} = |C_T|v_T$. Из сказанного вытекает, что модуль S_λ изоморфен ровно одному из неприводимых представлений $V_\mu = \mathbb{C}S_n\, s_U$, где U — любое заполнение формы μ. Поскольку по лем. 5.4 левое умножение на c_T аннулирует все идеалы V_μ с лексикографически меньшими, чем λ диаграммами μ, мы заключаем, что $S_\lambda \simeq V_\lambda$. □

Следствие 5.3
В разложении представления M_λ в сумму неприводимых встречаются только модули S_μ с $\mu \rhd \lambda$, а также модуль S_λ, входящий в M_λ с кратностью 1.

Доказательство. Так как оператор c_T переводит M_λ в подмодуль Шпехта и нетривиально действует на последнем, в разложении модуля M_λ в прямую сумму простых есть ровно одно слагаемое, изоморфное S_λ. Если существует S_n-линейное вложение $S_\mu \hookrightarrow M_\lambda$, то оператор c_U, отвечающий произвольному заполнению U формы μ, нетривиально действует на M_λ. Но в силу лем. 5.5 $c_U M_\lambda = 0$, когда μ не доминирует λ. □

Замечание 5.1. Можно показать, что векторы v_T, где T пробегает такие заполнения формы λ, числа в которых возрастают слева направо в каждой строке и сверху вниз в каждом столбце, образуют базис модуля Шпехта S_λ. Такие заполнения называют *стандартными таблицами Юнга* формы λ. Количество стандартных таблиц формы λ обозначается d_λ и может быть вычислено по *правилу крюков*:

$$d_\lambda = \dim S_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c\in\lambda} |\Gamma(c)|},$$

где произведение берётся по всем клеткам c диаграммы λ, а $|\Gamma(c)|$ обозначает *длину крюка* с вершиной в c, т. е. количество клеток в Г-образной поддиаграмме, состоящей из клетки c и всех клеток ниже c в том же столбце и всех клеток правее c в той же строке. Например, длины крюков диаграммы $\lambda = (4,2,1)$ суть

6	4	2	1
3	1		
1			

,

откуда размерность модуля Шпехта $S_{(4,2,1)}$ группы S_7 равна $7!/(6\cdot4\cdot3\cdot2) = 7\cdot5 = 35$. Доказательства этих и многих других красивых соотношений основаны на возможности отождествить прямую сумму $\mathfrak{R} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k\geqslant 0} R_{S_k}$ аддитивных групп колец представлений *всех* симметрических групп с $\mathbb{Z}$-модулем Λ симметрических функций от бесконечного числа переменных x_i, $i \in \mathbb{N}$, так, что классы изоморфизма модулей таблоидов M_λ переходят в полные симметрические многочлены[1] $h_\lambda = h_{\lambda_1}\dots h_{\lambda_n}$, классы изоморфизма модулей Шпехта S_λ — в многочлены Шура

$$s_\lambda = \frac{\det(x_j^{n-i+l_i})}{\det(x_j^{n-i})} = \det\begin{pmatrix} x_1^{n-1+l_1} & x_2^{n-1+l_1} & \dots & x_n^{n-1+l_1} \\ x_1^{n-2+l_2} & x_2^{n-2+l_2} & \dots & x_n^{n-2+l_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{pmatrix} : \det\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

а задаваемая тензорным умножением на одномерное знаковое представление инволюция на классах представлений — в каноническую инволюцию ω на кольце симметрических функций Λ, переводящую друг в друга многочлены Шура, отвечающие транспонированным диаграммам Юнга: $s_\lambda \leftrightarrow s_{\lambda^t}$, а также полные и элементарные симметрические многочлены: $h_\lambda \leftrightarrow e_\lambda$. Произвольный S_n-модуль U переходит при этом отождествлении в симметрическую функцию

$$\mathrm{ch}_U \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\mu|=n} z_\mu^{-1} \chi_U(C_\mu)\cdot p_\mu,$$

[1] Для каждого целого неотрицательного k *полным симметрическим многочленом* h_k называется сумма всех мономов от x_i полной степени k. Иными словами, $\prod_i(1 + x_i t) = \sum_{k\geqslant 0} h_k(x)t^k$. Как всегда, для диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, содержащей при каждом k ровно m_k клеток длины k, полагают $h_\lambda = \prod_i h_{\lambda_i} = \prod_k h_k^{m_k}$.

где $z_\lambda = \prod_i m_i(\lambda)!\, i^{m_i(\lambda)}$ обозначает порядок централизатора перестановки циклового типа[1] λ в симметрической группе S_n, $\chi_U(C_\mu)$ — значение характера представления U на классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$, состоящем из перестановок циклового типа μ, а $p_\mu = p_{\mu_1} \dots p_{\lambda_n}$ — симметрический многочлен Ньютона[2]. При этом умножение на кольце симметрических функций Λ превращается в *умножение Литтлвуда – Ричардсона* на $\mathfrak{R}$, которое переводит классы изоморфизмов линейных представлений $\varphi : S_k \to \mathrm{GL}(U)$ и $\psi : S_m \to \mathrm{GL}(W)$ в представление $\operatorname{ind}_{S_k \times S_m}^{S_{k+m}} \varphi \boxtimes \psi$, индуцированное представлением $\varphi \boxtimes \psi : S_k \times S_m \to \mathrm{GL}(U \otimes W)$ группы $S_k \times S_m$, вложенной в S_{k+m} как подгруппа, сохраняющая разбиение $\{1, \dots, k+m\} = \{1, \dots, k\} \sqcup \{k+1, \dots, k+m\}$. А скалярное произведение на $\mathfrak{R} = \oplus R_{S_k}$, равное прямой ортогональной сумме канонических скалярных произведений характеров на каждом R_{S_k}, задаёт на кольце симметрических функций Λ скалярное произведение, для которого полиномы Шура s_λ составляют ортонормальный базис, а полиномы Ньютона — ортогональный базис векторного пространства $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ со скалярными квадратами $(p_\lambda, p_\lambda) = z_\lambda$. Подробнее об этом см. в §§ 7, 8, 11 моего учебника, или в книгах: У. Фултон, Таблицы Юнга и их применение в… , М., «МЦНМО» и W. Fulton, J. Harris, Representation Theory. A first course, Springer-Verlag, 1991.

5.5. Соответствие Шура – Вейля. Зафиксируем векторное пространство V конечной размерности $d \geqslant 2$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах:

$$\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)} \quad \text{для всех}^3\ \sigma \in S_n\,, \tag{5-15}$$

а полная линейная группа $\mathrm{GL}(V)$ — тензорными степенями линейных операторов[4]:

$$f : v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto f^{\otimes n}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = fv_1 \otimes \dots \otimes fv_n \quad \text{для всех}^5\ f \in \mathrm{GL}(V)\,. \tag{5-16}$$

Эти действия коммутируют друг с другом и тем самым задают представление группы $\mathrm{GL}(V) \times S_n$ в пространстве $V^{\otimes n}$ по правилу

$$(f, \sigma) : v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto f(v_{g^{-1}(1)}) \otimes \dots \otimes f(v_{g^{-1}(n)})\,.$$

Следуя доказательству теор. 4.1 на стр. 35, рассмотрим изотипное разложение пространства $V^{\otimes n}$ как модуля над S_n:

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{|\lambda|=n} W_\lambda\,, \tag{5-17}$$

где λ пробегает n-клеточные диаграммы Юнга. Про тензоры, лежащие в изотипной компоненте W_λ, говорят, что они имеют *тип симметрии* λ, а само разложение (5-17) называется разложением тензоров по типам симметрии. Будучи перестановочными с операторами из S_n, операторы из $\mathrm{GL}(V)$ переводят каждый изотипный S_n-подмодуль W_λ в себя. Тем самым, каждое подпространство $W_\lambda \subset V^{\otimes n}$ тоже является представлением группы $\mathrm{GL}(V) \times S_n$. Пусть, как и выше, S_λ обозначает модуль Шпехта, т. е. неприводимый S_n-модуль, отвечающий диаграмме λ.

[1] См. пример 10.15 на с. 181 лекций [Алг 1].

[2] См. обозначения, введённые перед предл. 5.2 на стр. 53.

[1] Обратите внимание, что набор занумерованных векторов $v_1, \dots, v_n$ есть не что иное, как отображение $v : \{1, \dots, n\} \to V$. Левое действие группы S_n автоморфизмов множества $\{1, \dots, n\}$ на таких отображениях задаётся правилом $\sigma v(i) = v(\sigma^{-1}(i))$. При этом i-й слева элемент набора v оказывается в наборе $\sigma(v)$ на $\sigma(i)$-м слева месте.

[4] Иными словами, $\mathrm{GL}(V)$-модуль $V^{\otimes n}$ является n-й тензорной степенью тавтологического представления группы $\mathrm{GL}(V)$ в пространстве V.

По предл. 1.4 на стр. 11 каноническая свёртка

$$c_\lambda : \ \mathrm{Hom}_{S_n}(S_\lambda, V^{\otimes n}) \otimes S_\lambda \xrightarrow{\sim} W_\lambda \subset V^{\otimes n}\,, \ \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)\,, \tag{5-18}$$

является изоморфизмом. Если рассматривать $\mathrm{Hom}_{S_n}(S_\lambda, V^{\otimes n}) \otimes S_\lambda$ как внешнее тензорное произведение неприводимого представления S_λ группы S_n и представления группы $\mathrm{GL}(V)$ на пространстве $S^\lambda V \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{S_n}(S_\lambda, V^{\otimes n})$ по правилу $f : \varphi \mapsto f^{\otimes n} \circ \varphi$, то изоморфизм (5-18) будет изоморфизмом $\mathrm{GL}(V) \times S_n$-модулей.

Упражнение 5.7. Убедитесь в этом.

$\mathrm{GL}(V)$-модуль $S^\lambda V$ называется *представлением Шура* полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$, а сопоставление векторному пространству V пространства $S^\lambda V$, в котором происходит это представление, называется *функтором Шура*. Функторы Шура, отвечающие однострочной диаграмме $\lambda = (n)$ и одностолбцовой диаграмме $\mu = (1^n) = (1, \dots, 1)$, сопоставляют векторному пространству V его n-тые симметрическую и внешнюю степени $S^\lambda V = S^n V$ и[1] $S^\mu V = \Lambda^n V$, в которых оператор $f \in \mathrm{GL}(V)$ действует операторами $S^n f$ и $\Lambda^n f$ соответственно.

Лемма 5.6
Операторы $f^{\otimes n} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$, где $f \in \mathrm{GL}(V)$, линейно порождают алгебру $\mathrm{End}_{S_n}(V^{\otimes n})$.

Доказательство. Цепочка канонических изоморфизмов

$$\mathrm{End}(V^{\otimes n}) \simeq V^{\otimes n *} \otimes V^{\otimes n} \simeq V^{* \otimes n} \otimes V^{\otimes n} \simeq \big(V^* \otimes V\big)^{\otimes n} \simeq \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$$

отождествляет подалгебру $\mathrm{End}_{S_n}(V^{\otimes n}) \subset \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ с подпространством симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n\big(\mathrm{End}(V)\big) \subset \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$. Остаётся показать, что это пространство линейно порождается тензорами вида $f^{\otimes n}$, где $f \in \mathrm{GL}(V)$. Если бы все такие тензоры лежали в какой-нибудь гиперплоскости, задаваемой ненулевой линейной формой $\psi : \mathrm{Sym}^n\big(\mathrm{End}(V)\big) \to \Bbbk$, то ненулевой многочлен[2] $\psi(f^{\otimes n}) \cdot \det(f)$ от оператора f задавал бы тождественно нулевую функцию на пространстве $\mathrm{End}(V)$, что невозможно над бесконечным полем[3]. □

Предложение 5.3
Все представления Шура $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(S^\lambda V)$ неприводимы.

Доказательство. Каждый линейный оператор $F \in \mathrm{End}(S^\lambda V)$ задаёт линейное преобразование $F \otimes \mathrm{Id} : \varphi \otimes u \mapsto F(\varphi) \otimes u$ пространства $W_\lambda \simeq S^\lambda V \otimes S_\lambda$, перестановочное с действием S_n на этом пространстве. По лем. 5.6 это преобразование является линейной комбинацией лежащих в образе представления Шура операторов вида $\varphi \otimes u \mapsto \big(f^{\otimes n} \circ \varphi\big) \otimes u$, где $f \in \mathrm{End}(V)$. Тем самым, образ представления Шура линейно порождает алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}(S^\lambda V)$, и значит, оно неприводимо по упр. 1.10. □

Следствие 5.4 (соответствие Шура-Вейля)
Представление группы $\mathrm{GL}(V) \times S_n$ в пространстве $V^{\otimes n}$ полупросто, и его разложение в сумму неприводимых $\mathrm{GL}(V) \times S_n$-модулей имеет вид

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{|\lambda|=n} S^\lambda V \boxtimes S_\lambda\,, \tag{5-19}$$

[1] Обратите внимание, что при $n > d = \dim V$ внешняя степень будет нулевой.
[2] Ср. с доказательством предложения 14.6 на с. 235 лекций [Алг 1].
[3] Отметим, что алгебраически замкнутое поле автоматически бесконечно.

где суммирование идёт по всем n-клеточным диаграммам Юнга, S_λ обозначает обозначает S_n-модуль Шпехта[1], а $S^\lambda V$ обозначает представление Шура группы $\mathrm{GL}(V)$ левыми умножениями на $f^{\otimes n}$, $f \in \mathrm{GL}(V)$, в пространстве $\mathrm{Hom}_{S_n}(S_\lambda, V^{\otimes n})$.

Доказательство. Выше мы видели, что каждая λ-изотипная компонента действия S_n на $V^{\otimes n}$ является $\mathrm{GL}(V) \times S_n$-подмодулем, изоморфным внешнему тензорному произведению $S^\lambda V \boxtimes \boxtimes S_\lambda$ неприводимого S_n-модуля S_λ и представления Шура $S^\lambda V$ группы $\mathrm{GL}(V)$, неприводимого по предл. 5.3. Внешнее тензорное произведение неприводимых представлений неприводимо по теор. 4.1 на стр. 35. □

Замечание 5.2. Задаваемое диаграммами Юнга соответствие между неприводимыми представлениями симметрических и полных линейных групп называется *соответствием Шура-Вейля*. Обратите внимание, что в этом соответствии количество клеток n в диаграмме Юнга λ никак не связано с размерностью d пространства V и может быть любым. При этом некоторые пространства $S^\lambda V$ могут оказаться нулевыми, как это происходит, к примеру, при $n > \dim V$ с пространствами $S^{(1^n)}V = \Lambda^n V$, отвечающими одностолбцовым диаграммам Юнга и соответствующими знаковым представлениям симметрических групп S_n. Можно показать, что ненулевые $\mathrm{GL}(V)$-модули $S^\lambda V$ не изоморфны друг другу при разных λ и с точностью до тензорных умножений на одномерные представления $\det^m : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}_1(\Bbbk)$, в которых $f \in \mathrm{GL}(V)$ действует умножением на $\det^m(f)$, ими исчерпываются все конечномерные неприводимые представления $\varrho : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(W)$, в которых элементы матрицы ϱ_f являются рациональными функциями элементов матрицы f. Подробнее об этом см. в книгах: Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988, и W. Fulton, J. Harris. Representation Theory. A first course. Springer-Verlag, 1991.

Замечание 5.3. Пространство $S^\lambda V$ допускает явное комбинаторное описание в терминах пространства V, подобное описаниям симметрической и внешней степеней пространства V, отвечающих однострочной и одностолбцовой диаграммам. А именно, обозначим через $\lambda^t_1, \dots, \lambda^t_m$ длины столбцов диаграммы λ и положим $\Lambda^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^{\lambda^t_1} V \otimes \dots \otimes \Lambda^{\lambda^t_m} V$. Пространство $S^\lambda V$ является фактором пространства $\Lambda^\lambda V$ по соотношениям *столбцового обмена*. Чтобы их написать, введём следующие обозначения. Будем называть *векторным заполнением* диаграммы λ таблицу, которая получатся расстановкой произвольных векторов $v_1, \dots, v_n \in V$, где $n = |\lambda|$, в клетки диаграммы λ. Для данного векторного заполнения T диаграммы λ через $v^T \in \Lambda^\lambda$ обозначается тензорное произведение лежащих $\Lambda^{\lambda^t_1} V, \dots, \Lambda^{\lambda^t_1} V$ грассмановых мономов, полученных грассмановым перемножением векторов в каждом столбце диаграммы в порядке от верхнего к нижнему. Каждое соотношение столбцового обмена отвечает выбору какого-нибудь векторного заполнения T, каких-нибудь двух соседних столбцов диаграммы λ — пусть это будут i-й и $(i+1)$-й столбцы — и какого-нибудь непустого множества I клеток в $(i+1)$-м столбце. Оно имеет вид $v^T = \sum_\sigma v^{\sigma T}$, где σ пробегает все перестановки векторов v_i, осуществляющие сохраняющий порядок[2] обмен векторов из клеток I с какими-либо $|I|$ векторами из предыдущего i-го столбца, а σT означает результат применения перестановки σ к заполнению T. Например,

[1] Т. е. неприводимое представление группы S_n, отвечающее диаграмме λ.

[2] Сохранение порядка означает, что если векторы $u, w \in I$ меняются соответственно с векторами u', w' из i-го столбца, и в $(i+1)$-м столбце u стоит выше, чем w, то в i-м столбце u' стоит выше, чем w'.

для заполнения

v_1	v_3
v_2	

трёхклеточной диаграммы $\lambda = (2,1)$ имеется ровно одно соотношение обмена, требующее, чтобы для любых векторов $v_1, v_2, v_3 \in V$ в пространстве $S^{(2,1)}V$ выполнялось соотношение

$$(v_1 \wedge v_2) \otimes v_3 = (v_3 \wedge v_2) \otimes v_1 + (v_1 \wedge v_3) \otimes v_2 \,. \tag{5-20}$$

Подробности см. в книге: У. Фултон. Таблицы Юнга и их применение в…, М., «МЦНМО».

Пример 5.2 (разложение тензорного куба[1])
Разложение тензорного куба $V^{\otimes 3}$ в сумму неприводимых $\mathrm{GL}(V) \times S_3$-модулей имеет вид

$$V^{\otimes 3} \simeq S^3V \boxtimes \mathbb{1} \quad \oplus \quad \mathrm{Lie}^3 V \boxtimes \Delta_2 \quad \oplus \quad \Lambda^3 V \boxtimes \mathrm{sgn}\,,$$

где $\mathbb{1}$, sgn и Δ_2 суть одномерное тривиальное, одномерное знаковое и двумерное симплициальное представления симметрической группы S_3, а S^3V, Λ^3V и $\mathrm{Lie}^3 V$ суть неприводимые представления группы $\mathrm{GL}(V)$ в пространствах однородных симметрических, грассмановых и лиевских многочленов степени 3. Пространства S^3V и Λ^3V изоморфны подпространствам симметричных и знакопеременных тензоров $\mathrm{Sym}^3 V \subset V^{\otimes 3}$ и $\mathrm{Alt}^3 V \subset V^{\otimes 3}$, а пространство $\mathrm{Lie}^3 V$ — подпространству лиевских тензоров в $V^{\otimes 3}$, линейно порождённому двойными коммутаторами $[[u,v],w]$ всевозможных векторов $u, v, w \in V$ в тензорной алгебре[2] TV. Пространство лиевских тензоров степени два $\mathrm{Lie}^2 V \simeq \Lambda^2 V$ изоморфно подпространству знакопеременных тензоров $\mathrm{Alt}^2 V \subset V^{\otimes 2}$, которое линейно порождается коммутаторами $[u,w] = u \otimes w - w \otimes u$ всевозможных векторов $u, w \in V$. Коммутатрное умножение

$$\mathrm{Lie}^2 V \otimes V \to \mathrm{Lie}^3 V\,,\ \tau \otimes v \mapsto [\tau, v]\,,$$

сюрьективно, и его ядро линейно порождается всевозможными трёхчленными суммами

$$[v_1, v_2] \otimes v_3 + [v_2, v_3] \otimes v_1 + [v_3, v_1] \otimes v_2\,,$$

которые переходят в нуль в силу тождества Якоби для коммутаторов[3]. Иначе говоря, $\mathrm{Lie}^3 V$ получается из факторизацией $\mathrm{Lie}^2 V \otimes V \simeq \Lambda^2 V \otimes V$ по соотношениям (5-20). Орбита ненулевого лиевского тензора $\omega \in V^{\otimes 3}$ под действием симметрической группы S_3 порождает двумерное векторное подпространство, на котором S_3 действует группой треугольника с вершинами ω, $\tau\omega$, $\tau^2\omega$, где $\tau \in S_3$ — цикл длины три. Вся компонента $\mathrm{Lie}^3 V \boxtimes \Delta_2$ является образом Δ_2-изотипного проектора $e - (e + \tau + \tau^2)/3 \in \Bbbk S_3$ или, что тоже самое, ядром оператора $(e + \tau + \tau^2)/3$ усреднения по 3-циклу. Каждый неприводимый $\mathrm{GL}(V)$-подмодуль этой компоненты имеет вид $\mathrm{Lie}^3 V \boxtimes u$, где $u \in \Delta_2$, и группа S_3 переставляет эти подмодули, действуя на вектор u симметриями треугольника.

[2] Ср. с примером 14.6 на с. 233 лекций [Алг1].
[2] Напомню, что $[a,b] = a \otimes b - b \otimes a$ для $a, b \in TV = \bigoplus_{k \geqslant 0} V^{\otimes k}$.
[3] См. упражнение 14.15 на с. 234 лекций [Алг 1].

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 5.3. Примените сл. 5.1 на стр. 49 к перестановке g^{-1}.

Упр. 5.5. Аналогом равенства (5-6) и лем. 5.2 является равенство $\operatorname{sgn}(q) q s'_T p = s'_T$, справедливое для всех $p \in R_T$, $q \in C_T$, и утверждение о том, что пространство

$$E'_T = \{ f \in \mathbb{C}S_n \mid \forall p \in R_T \ \forall q \in C_T \ \ \operatorname{sgn}(q) q f p = f \}$$

одномерно и порождается симметризатором s'_T. Последнее доказывается при помощи упр. 5.3 дословно также, как лем. 5.2. Дополнением к лем. 5.4 на стр. 51 является равенство $s'_T \mathbb{C}S_n \, s'_U = 0$, справедливое при $\lambda(T) > \lambda(U)$ и непосредственно вытекающее из оригинальной лем. 5.4. Утверждения из лем. 5.3 и теор. 5.1 на стр. 51, как и их доказательства, сохраняют силу после замены s на s'.