

Пространства, алгебры и группы операторов

В этом листочке буква $\mathbb{k}$ по умолчанию означает произвольное поле.

- АЛ1♦1.** Существуют ли $(n + 1)$ -мерные векторные подпространства в $\text{End}(\mathbb{k}^n)$, состоящие из попарно перестановочных диагонализуемых операторов $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$?
- АЛ1♦2.** Покажите, что каждая конечномерная ассоциативная $\mathbb{k}$ -алгебра с единицей и без делителей нуля является алгеброй с делением¹.
- АЛ1♦3.** Найдите в $\text{Mat}_6(\mathbb{R})$ все ассоциативные $\mathbb{R}$ -подалгебры с единицей размерности не менее 32.
- АЛ1♦4.** Ассоциативная $\mathbb{k}$ -алгебра называется *полупростой*, если она является полупростым левым модулем над собою². Покажите, что конечномерная как векторное пространство над $\mathbb{k}$ коммутативная ассоциативная $\mathbb{k}$ -алгебра с единицей полупроста если и только если в ней нет нильпотентных элементов.
- АЛ1♦5.** Пусть на конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ действует конечное множество G линейных операторов, образующих группу относительно композиции, причём $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$. Покажите, что все эти операторы диагонализуемы, и что возможность диагонализировать их все одновременно равносильна коммутативности группы G .
- АЛ1♦6*.** Приведите пример нетривиального неразложимого представления конечной группы с ненулевым пространством инвариантов.
- АЛ1♦7.** Свяжем с матрицей $A \in \text{Mat}_n(K)$, где K — любое коммутативное кольцо, линейные отображения $L_A, R_A, \text{ad}_A, \text{Ad}_A : \text{Mat}_n(K) \rightarrow \text{Mat}_n(K)$, заданные правилами а) $L_A(X) = AX$ б) $R_A(X) = XA$ в) $\text{ad}_A(X) = AX - XA$ г) $\text{Ad}_A(X) = AXA^{-1}$ (тут предполагается, что в K есть единица, и матрица A обратима). Найдите их следы и определители.
- АЛ1♦8.** Те же вопросы про линейные эндоморфизмы, которые матрица A задаёт на пространстве а) грассмановых б) обычных однородных многочленов степени 2 от строки переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ по правилу $f(\xi) \mapsto f(\xi A)$.
- АЛ1♦9 (характеры).** Для линейного представления $\varrho : G \rightarrow \text{End}(V)$ группы G на пространстве V , переводящего каждый элемент $g \in G$ в линейный оператор $\varrho_g : V \rightarrow V$ так, что $\varrho_{gh} = \varrho_g \circ \varrho_h$, функция $\chi_\varrho : G \rightarrow \mathbb{k}, g \mapsto \text{tr } \varrho_g$, называется *характером* представления ϱ . Выразите через характеры χ_ν и χ_μ представлений $\nu : G \rightarrow \text{End}(U)$ и $\mu : G \rightarrow \text{End}(W)$ характеры естественно возникающих представлений группы G в пространствах а) $U \oplus W, g : (u, w) \mapsto (\nu_g u, \mu_g w)$ б) $U \otimes W, g : u \otimes w \mapsto \nu_g u \otimes \mu_g w$ в) $U^*, g \mapsto \nu_{g^{-1}}^*$ г) $\text{Hom}(U, W), g : \varphi \mapsto \mu_g \circ \varphi \circ \nu_g^{-1}$ д) $L_U^n, g \mapsto \Lambda^n \nu_g$ е) $S_U^n, g \mapsto S^n \nu_g$.
- АЛ1♦10.** В условиях предыдущей задачи покажите, что а) $\chi_{S^2 U}(g) = (\chi_U^2(g) + \chi_U(g^2)) / 2$ б) $\chi_{\Lambda^2 U}(g) = (\chi_U^2(g) - \chi_U(g^2)) / 2$.
- АЛ1♦11.** Пусть конечная группа G действует на координатном пространстве $\mathbb{k}^n$ перестановками стандартных базисных векторов. Покажите, что значение характера этого представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных точек перестановки g .

¹Т. е. у каждого ненулевого элемента a есть двусторонний обратный a^{-1} : $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

²Т. е. распадается как векторное пространство над $\mathbb{k}$ в прямую сумму инвариантных относительно левого умножения на все элементы алгебры неприводимых подпространств.