

Неприводимые характеры

- АЛЗ♦1.** Докажите, что комплексное представление V конечной группы тогда и только тогда изоморфно двойственному представлению V^* , когда все значения его характера вещественны.
- АЛЗ♦2.** Приведите пример одномерного комплексного представления конечной группы, не изоморфного своему двойственному.
- АЛЗ♦3.** Пусть поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто и $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$. Для фиксированных $g, h \in G$ вычислите сумму $\sum_{\chi} \chi(g)\chi(h^{-1})$ по всем неприводимым характерам группы G в случае, когда g и h а) сопряжены б) не сопряжены.
- АЛЗ♦4 (аффинная группа конечной прямой).** Обозначим через G группу аффинных преобразований $x \mapsto ax + b$ аффинной прямой $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$. Покажите, что
- представление группы G в пространстве комплекснозначных функций на $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$ с нулевой суммой значений неприводимо
 - все остальные неприводимые представления группы G одномерны.
 - Составьте таблицу неприводимых характеров группы G .
- АЛЗ♦5.** Собственная группа додекаэдра тавтологически действует на трёхмерном пространстве V . Разложите в сумму неприводимых её представление в пространстве $\text{End}(V)$ сопряжениями.
- АЛЗ♦6.** Обозначим через sgn одномерное знаковое представление симметрической группы S_5 . Найдите размерности, вычислите характеры и разложите на приводимые следующие представления симметрической группы S_5 :
- симплициальное V , а также $V' = V \otimes \text{sgn}$, $\Lambda^2 V$ и $S^2 V$
 - представление W в функциях на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$ с нулевой суммой значений, заданное посредством изоморфизма $S_5 \simeq \text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$, а также $W' = W \otimes \text{sgn}$, $S^2 W$, $\Lambda^2 W$ и $V \otimes W$.
- АЛЗ♦7.** Вычислите таблицу неприводимых характеров группы S_5 .
- АЛЗ♦8.** Выясните, как раскладываются в суммы неприводимых ограничения неприводимых представлений группы S_5 на подгруппу A_5 .
- АЛЗ♦9.** Составьте таблицу неприводимых характеров а) группы $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ б*) подгруппы верхних унитреугольных матриц в $\text{SL}_3(\mathbb{F}_3)$.
- АЛЗ♦10*.** Пусть характер комплексного неприводимого представления V конечной группы отличен от нуля на классе сопряжённости K , и $\text{НОД}(\dim V, |K|) = 1$. Покажите, что все элементы из K действуют на V скалярно.
- АЛЗ♦11.** Пусть $\varrho : G \hookrightarrow \text{GL}(V)$ — инъективное комплексное линейное представление конечной группы G в пространстве размерности $\dim V \geq 2$. Покажите, что:
- характер χ_{ϱ} принимает значение $\dim V$ только на единице группы
 - в разложениях представлений $V^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$, встречаются все неприводимые G -модули.
- АЛЗ♦12*.** Покажите, что характер одномерного комплексного неприводимого представления зануляется хотя бы на одном классе сопряжённости.