

Индукцированные представления

АЛ4♦1. Разложите на неприводимые представление симметрической группы S_5 , индуцированное одномерным представлением цикла длины 5 умножением на $e^{2\pi i/5}$.

АЛ4♦2. Обозначим через $R_G \subset \mathbb{Z}^G$ и $R_H \subset \mathbb{Z}^H$ кольца конечномерных комплексных представлений конечной группы G и её подгруппы $H \subset G$. Покажите, что

- а) для любой циклической подгруппы $C \subset G$ функция $\chi_C : C \rightarrow \mathbb{Z}$, сопоставляющая каждому порождающему группу C элементу число $|C|$, а всем остальным элементам — нуль, лежит в R_C
- б) $\sum_{C \subset G} \text{ind } \chi_C = |G|$, где суммирование идёт по всем циклическим подгруппам $C \subset G$
- в) (теорема Артина) для любого неприводимого характера $\lambda \in R_G$ функция $|G| \cdot \lambda$ лежит в $\mathbb{Z}$ -линейной оболочке характеров, индуцированных с циклических подгрупп группы G . Иными словами, характеры индуцированных с циклических подгрупп представлений порождают в R_G подрешётку конечного индекса.

АЛ4♦3. Приведите пример, показывающий, что индуцирование, вообще говоря, не перестановочно с тензорным произведением представлений.

АЛ4♦4 (группа Гейзенберга H_p^n с $p > 2$). Свяжем с n -мерным векторным пространством L над полем $\mathbb{F}_p$ с $p > 2$ группу H_p^n троек $(x, u, u^*) \in \mathbb{F}_p \times L \times L^*$ с операцией

$$(x_1, u_1, u_1^*) \circ (x_2, u_2, u_2^*) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2 + (u_2^*(u_1) - u_1^*(u_2))/2, u_1 + u_2, u_1^* + u_2^*),$$

и обозначим через $H' \simeq \mathbb{F}_p \times L \subset H_p^n$ абелеву подгруппу троек вида $(x, u, 0)$. Покажите, что

- а) H_p^n — это группа, и перечислите её классы сопряжённости
- б) H_p^n изоморфна группе верхних унитреугольных 3×3 матриц над $\mathbb{F}_p$
- в) $\forall a \in \mathbb{F}_p^\times$ комплексное представление W_a группы H_p^n , индуцированное одномерным представлением подгруппы H' с характером $\psi_a(x, u, 0) = e^{2\pi i ax/p}$, неприводимо
- г) $W_\alpha \not\simeq W_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, а все остальные неприводимые $\mathbb{C}H_p^n$ -модули одномерны.

АЛ4♦5 (группа Гейзенберга H_2^n). Обозначим через H группу, порождённую $4n + 4$ образующими $\pm 1, \pm u_1, \dots, \pm u_{2n+1}$ с соотношениями $u_i^2 = -1, u_i u_j = -u_j u_i$ и «минус на минус даёт плюс». Покажите, что

- а) H состоит из 2^{2n+2} элементов $\pm u_I = \pm u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k}$, где $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ пробегает всевозможные возрастающие подмножества в $\{1, 2, \dots, (n+1)\}$ и $u_\emptyset = 1$
- б) множество H_2^n элементов $\pm u_I$ с индексами I чётной длины образует подгруппу в H
- в) H_2^1 изоморфна группе кватернионных единиц $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.
- г) Опишите центр, классы сопряжённости и неприводимые представления группы H_2^n .

АЛ4♦6. Пусть $G = A \rtimes H$, где A абелева с группой мультипликативных характеров $A^\wedge$.

- а) Покажите, что H действует на $A^\wedge$ по правилу $h : \chi \mapsto \chi \circ \text{Ad}_{h^{-1}}$.
- б) Пусть $G_\chi = A H_\chi$, где H_χ — стабилизатор характера $\chi \in A^\wedge$ в предыдущем действии. Покажите, что $\chi' : G_\chi \rightarrow \mathbb{C}^\times, ah \mapsto \chi(a)$, является одномерным характером группы G_χ .
- в) Для каждого $\varrho \in \text{Ir } H_\chi$ обозначим через ϱ' композицию представления ϱ с эпиморфизмом факторизации $G_\chi \twoheadrightarrow H_\chi$ по подгруппе A . Покажите, что каждое неприводимое представление группы G индуцировано представлением $\chi' \otimes \varrho'$ подгруппы G_χ , и все такие представления попарно не изоморфны при разных $\chi \in A^\wedge/H, \varrho \in \text{Ir}(H_\chi)$.
- г) Опишите неприводимые представления группы $\mathbb{Z}/(7) \rtimes \mathbb{Z}/(3)$.

АЛ4♦7*. Установите для $(n-1)$ -мерного симплициального представления V_Δ группы S_n изоморфизмы а) $\Lambda^k V_\Delta \simeq S_{((n-k), 1^k)}$ б) $S^2 V_\Delta \simeq \mathbb{1} \oplus S_{((n-2), 2)}$, где S_λ — модуль Шпехта, отвечающий диаграмме λ .