

Повторение: представления одного оператора

АС1♦1. Линейный оператор f на векторном пространстве $V = \mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Опишите все неприводимые и все неразложимые f -инвариантные подпространства в V , а также все разложения пространства V в прямую сумму f -инвариантных подпространств.

АС1♦2. Что изменится в ответе на предыдущую задачу, если заменить $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{C}^3$?

АС1♦3. Найдите след и определитель а) поворота вещественной евклидовой плоскости на угол α б) поворота вещественного трёхмерного евклидова пространства на угол α в) отражения n -мерного евклидова пространства в гиперплоскости.

АС1♦4. Когда две квадратные матрицы (над произвольным полем) подобны друг другу? Покажите, что квадратная матрица над любым полем подобна своей транспонированной.

АС1♦5. Вычислите $\text{Hom}_{\mathbb{k}[x]}(\mathbb{k}[x]/(f), \mathbb{k}[x]/(g))$ и найдите его размерность.

АС1♦6. Линейный оператор f на двумерном векторном пространстве имеет в некотором базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишите матрицы операторов $f^{\otimes 2}$, $\Lambda^2 f$ и $S^3 f$ в каких-нибудь базисах.

АС1♦7. Оператор f на пространстве U имеет одну жорданову клетку размера $n \times n$ с собственным числом ν , а оператор g на пространстве W имеет одну жорданову клетку размера $m \times m$ с собственным числом μ . Найдите ЖНФ оператора $f \otimes g$ на пространстве $U \otimes W$, если а) $\nu = \mu = 0$ б) $\nu = 0, \mu = 1$ в*) $\nu = \mu = 1$. Каким будет ответ для произвольных ν, μ ?

АС1♦8. Перечислите все импликации между следующими свойствами линейного оператора $f: V \rightarrow V$ над произвольным полем $\mathbb{k}$: а) у f есть циклический вектор б) $\mu_f = \chi_f$ в) $Z_f \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \text{End}(V) \mid hf = fh\}$ совпадает с $\mathbb{k}[f] \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(F) \mid \varphi \in \mathbb{k}[t]\}$.

АС1♦9*. Пусть линейный оператор g над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ перестановочен со всеми операторами из Z_f . Верно ли, что $g \in \mathbb{k}[f]$?