

Знакомство с представлениями

- АС1♦1.** Покажите, что алгебра $\mathbb{R}$ -линейных операторов $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, перестановочных с оператором T_α поворота на угол $\alpha \in (0, \pi)$, является полем. Что это за поле?
- АС1♦2.** Алгебра матриц $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$ действует на себе левыми умножениями. а) Убедитесь, что это представление полупросто. Какие простые модули в него входят? б) Убедитесь, что разложение в прямую сумму простых подмодулей не единственно. в) Найдите след левого умножения на данную матрицу M .
- АС1♦3.** Пусть U — простой A -модуль¹, а W — конечномерное векторное пространство. Зададим действие A на $W \otimes U$ правилом $a : w \otimes u \mapsto w \otimes au$. Докажите, что $W \otimes U$ является полупростым A -модулем, и каждый его неприводимый A -подмодуль имеет вид $w \otimes U$, где $w \in W$ — любой вектор. Выведите из этой задачи предыдущую.
- АС1♦4.** Пусть некий A -модуль изоморфен прямой сумме простых модулей $U_1, \dots, U_n$. Покажите, что все его подмодули и фактор модули изоморфны прямым суммам подходящих простых подмодулей из набора $U_1, \dots, U_n$.
- АС1♦5.** Покажите, что все конечномерные неприводимые представления абелевых групп над алгебраически замкнутым полем исчерпываются одномерными.
- АС1♦6.** Приведите пример неразложимого приводимого представления группы $\mathbb{Z}$.
- АС1♦7.** Опишите все конечномерные комплексные линейные представления а) бесконечной б) конечной циклической группы.
- АС1♦8 (представления группы $D_3 \simeq S_3$).** Используя соотношения $\sigma^2 = \tau^3 = e$ и $\sigma\tau = \tau^{-1}\sigma$ между образующими² σ и τ группы треугольника $D_3 \simeq S_3$ выясните: а) какими могут быть собственные числа операторов ϱ_σ и ϱ_τ в конечномерном комплексном линейном представлении $\varrho : D_3 \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ б) как действует оператор ϱ_σ на собственные векторы оператора ϱ_τ . Выведите из этого, что в) комплексные г) вещественные неприводимые представления группы $D_3 \simeq S_3$ исчерпываются тривиальным и знаковым³ одномерными представлениями и тавтологическим двумерным представлением полной группы правильного треугольника на плоскости.
- АС1♦9.** Обозначим через $\mathbb{K}D_3$ векторное пространство с базисом D_3 и зададим на нём умножение правилом $\sum_{g \in D_3} x_g g \cdot \sum_{h \in D_3} y_h h = \sum_{g, h \in D_3} x_g y_h gh$. а) Убедитесь, что получилась ассоциативная $\mathbb{K}$ -алгебра с единицей. б) Зададим на $\mathbb{K}D_3$ билинейную форму правилом $(u, w) = \text{tr}(uw)$, где $u, w \in \mathbb{K}D_3$ и $uw : \mathbb{K}D_3 \rightarrow \mathbb{K}D_3, v \mapsto uwv$ оператор левого умножения на произведение $uw \in \mathbb{K}D_3$. Докажите, что она симметрична, а при $\text{char } \mathbb{K} \neq 2, 3$ ещё и невырождена. В последнем случае найдите в $\mathbb{K}D_3$ базис, двойственный относительно этой формы к базису из элементов группы. в) Пусть $\text{char } \mathbb{K} \neq 2, 3$. Докажите, что представление группы D_3 левыми умножениями в алгебре $\mathbb{K}D_3$ вполне приводимо и найдите его изотипные компоненты.
- АС1♦10*.** Рассмотрим действие группы D_3 на симметрических степенях $S^n U$ тавтологического двумерного представления U по правилу $g : u_1 \cdot \dots \cdot u_n \mapsto gu_1 \cdot \dots \cdot gu_n$. а) Покажите, что $S^{n+6}U = S^n U \oplus \mathbb{K}D_3$, где $\mathbb{K}D_3$ из предыдущей задачи. б) Разложите $S^n U$ в сумму неприводимых представлений. в) Опишите подалгебру S_3 -инвариантов в симметрической алгебре SU . г) (взаимность Шура) Покажите, что $S^k S^m U \simeq S^m S^k U$ как S_3 -модули при всех k, m .

¹Где A — множество или ассоциативная алгебра.

²Напомним, что σ — это симметрия, а τ — поворот.

³В котором каждая перестановка $\sigma \in S_3$ действует умножением на свой знак.