

Линейные представления маленьких конечных групп

АС4♦1. Составьте таблицу неприводимых комплексных характеров группы диэдра D_n (если общий случай вызывает затруднения, начните с $n = 2, 3, 4, 5, 6$).

АС4♦2. Составьте таблицу неприводимых комплексных характеров группы кватернионных единиц Q_8 .

АС4♦3. Вычислите характеры следующих представлений группы S_4 :

- а) двумерного посредством эпиморфизма на группу треугольника
- б) трёхмерного вращениями куба
- в) трёхмерного симплициального

Есть ли среди них приводимые? А изоморфные? Все ли неприводимые представления группы S_4 присутствуют в этом списке?

АС4♦4. Как меняются неприводимые представления группы S_4 при тензорном умножении на знаковое представление?

АС4♦5. Существует ли инъективный гомоморфизм групп $S_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$?

АС4♦6. Разложите в сумму неприводимых ограничения всех представлений из [зад. АС4♦3](#) на подгруппу S_3 , вложенную в S_4 как стабилизатор элемента «4».

АС4♦7. Разложите в сумму неприводимых тензорные квадраты двух трёхмерных неприводимых представлений группы S_4 .

АС4♦8. Разложите в сумму неприводимых представление собственной группы куба в пространстве $\mathbb{C}$ -значных функций на множестве его а) вершин б) рёбер в) граней. Из каких функций¹ состоят изотипные компоненты этих представлений?

АС4♦9. На гранях куба написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 — как на игровой кости. За один ход каждое из них заменяют на среднее арифметическое чисел с четырёх соседних граней. Вычислите с точностью до 10^{-3} , что будет написано на гранях после 2026 ходов. Зависит ли ответ от начальной расстановки чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6?

АС4♦10. Перечислите все неприводимые представления группы A_4 и вычислите их характеры.

АС4♦11. Разложите в сумму неприводимых ограничения всех неприводимых представлений группы S_4 на подгруппу A_4 .

АС4♦12. Составьте таблицу неприводимых комплексных характеров бинарной группы треугольника $G_{12} \simeq \mathbb{Z}/(3) \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}/(4)$, где $\psi : \mathbb{Z}/(4) \rightarrow \mathrm{Aut} \mathbb{Z}/(3)$, $[1]_4 \mapsto -\mathrm{Id}$.

АС4♦13. Вычислите характеры следующих представлений группы A_5 :

- а) двух трёхмерных вращениями додекаэдра
- б) четырёхмерного вращениями правильного (четырёхмерного) симплекса.

Есть ли среди них приводимые? А изоморфные? Все ли неприводимые представления группы A_5 присутствуют в этом списке?

АС4♦14. Вычислите характеры не перечисленных в предыдущей задаче неприводимых представлений группы A_5 .

АС4♦15. Разложите на неприводимые а) внешний б) симметрический квадрат четырёхмерного неприводимого представления группы A_5 .

АС4♦16. Разложите на неприводимые тавтологическое представление группы вращений додекаэдра в пространстве функций на множестве его а) вершин б) рёбер в) граней. Из каких функций состоят изотипные компоненты этих представлений?

¹Напомним, что в анализе функции бывают постоянные, чётные, нечётные, с нулевой суммой значений, и т. п. Все эти эпитеты характеризуют ту или иную «симметричность» функции. Также, как и неприводимые представления.