Индуцированные представления

AC5⋄1. Разложите на неприводимые представление симметрической группы S_4, индуцированное одномерными представлениями **а)** 4-цикла умножением на $i \in \mathbb{C}$ **б)** 3-цикла умножением на $\omega = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$.

AC5⋄2. Вложим аддитивную абелеву группу $\mathbb{Z}/(p)$ в качестве подгруппы сдвигов в группу G аффинных преобразований $x \mapsto ax + b$ прямой $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$. Покажите, что одномерное комплексное представление группы $\mathbb{Z}/(p)$ с характером $\chi : [n]_p \mapsto e^{2\pi i n/p}$ индуцирует неприводимое $(p-1)$-мерное представление группы G в пространстве функций $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p) \to \mathbb{C}$ с нулевой суммой значений.

AC5⋄3 (формула проекции). Докажите, что $\operatorname{ind}(U \otimes \operatorname{res} W) \simeq \operatorname{ind}(U) \otimes W$ для любых представлений W и U группы G и её подгруппы H соответственно.

AC5⋄4. Пусть конечная группа G имеет (автоматически нормальную) подгруппу H индекса 2. Обозначим через $\operatorname{sgn} : G \to \pm 1$ композицию эпиморфизма $G \twoheadrightarrow G/H$ и нетривиального одномерного представления группы $G/H \simeq \mathbb{Z}/(2)$, а для каждого представления $\varrho : H \to \mathrm{GL}(V)$ обозначим через $\varrho' = \varrho \circ \mathrm{Ad}_g$ его композицию с автоморфизм сопряжения $\mathrm{Ad}_g : H \xrightarrow{\sim} H$, $h \mapsto ghg^{-1}$, каким-нибудь элементом $g \in G \smallsetminus H$ и будем называть представление ϱ' *сопряжённым* к ϱ. Покажите, что

а) с точностью до изоморфизма представление ϱ' не зависит от выбора $g \in G \smallsetminus H$

б) для каждого неприводимого представления W группы G имеется следующая альтернатива: либо $W \simeq W \otimes \operatorname{sgn}$, и тогда его ограничение $\operatorname{res}^G_H W \simeq V \oplus V'$ является суммой двух разных, но сопряжённых неприводимых представлений V, V' подгруппы H, а $\operatorname{ind}^G_H V \simeq \operatorname{ind}^G_H V' \simeq W$, либо $W \not\simeq W \otimes \operatorname{sgn}$, и тогда ограничение $V = \operatorname{res}^G_H W$ тоже неприводимо и изоморфно своему сопряжённому V', а $\operatorname{ind}^G_H V \simeq W \oplus (W \otimes \operatorname{sgn})$

в) для каждого неприводимого представления V подгруппы H имеется следующая альтернатива: либо $V \simeq V'$, и в этом случае индуцированное им представление $\operatorname{ind}^G_H V \simeq$ $\simeq W \oplus (W \otimes \operatorname{sgn})$ является суммой двух разных, но получающихся друг из друга подкруткой на sgn неприводимых представлений группы G, а $\operatorname{res}^G_H W \simeq \operatorname{res}^G_H W \otimes \operatorname{sgn} \simeq V$, либо $V \not\simeq V'$, и тогда представление $W = \operatorname{ind}^G_H V$ тоже неприводимо и изоморфно подкрученному представлению $W \otimes \operatorname{sgn}$, а $\operatorname{res}^G_H V \simeq V \oplus V'$

г) число тех классов сопряжённости группы H, которые остаются таковыми и в группе G, равно числу классов сопряжённости группы G, не содержащихся в H.

AC5⋄5. Посмотрите, как результаты предыдущей задачи соотносятся с представлениями групп **а)** D_n и $\mathbb{Z}/(n)$ **б)** S_4 и A_4 **в)** S_5 и A_5.

AC5⋄6. Покажите, что представление группы S_n левыми умножениями в левом идеале[1] $\mathbb{C}[S_n]\, r_T$ индуцировано с тривиального представления подгруппы $R_T \subset S_n$, а в левом идеале $\mathbb{C}S_n\, c_T$ — со знакового представления подгруппы $C_T \subset S_n$.

AC5⋄7. Покажите, что идеал $\mathbb{C}[S_n]\, s_T$, вообще говоря, не содержится в идеале $\mathbb{C}[S_n]\, r_T$.

AC5⋄8. Укажите, каким модулям Шпехта S_λ изоморфны перечисленные на предыдущих семинарах геометрически заданные неприводимые представления групп: **а)** S_3 **б)** S_4 **в*)** S_5.

---

[1] Напомню, что с каждым заполнением T клеток диаграммы Юнга λ не повторяющимися числами от 1 до $n = |\lambda|$ связаны *строчная подгруппа* $R_T \subset S_n$, состоящая из всех перестановок, переводящих элементы каждой строки заполнения T в элементы из той же самой строки, и *столбцовая подгруппа* $C_T \subset S_n$, состоящая из всех перестановок, переводящих элементы каждого столбца заполнения T в элементы из того же самого столбца, а также *симметризаторы Юнга* $r_T = \sum_{\sigma \in R_T} \sigma$, $c_T = \sum_{\sigma \in C_T} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$ и $s_T = r_T c_T$, лежащие в групповой алгебре $\mathbb{Z}S_n$.