

Индукцированные представления

АС5♦1. Разложите на неприводимые представление симметрической группы S_4 , индуцированное одномерными представлениями а) 4-цикла умножением на $i \in \mathbb{C}$ б) 3-цикла умножением на $\omega = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$.

АС5♦2. Вложим аддитивную абелеву группу $\mathbb{Z}/(p)$ в качестве подгруппы сдвигов в группу G аффинных преобразований $x \mapsto ax + b$ прямой $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$. Покажите, что одномерное комплексное представление группы $\mathbb{Z}/(p)$ с характером $\chi: [n]_p \mapsto e^{2\pi i n/p}$ индуцирует неприводимое $(p-1)$ -мерное представление группы G в пространстве функций $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p) \rightarrow \mathbb{C}$ с нулевой суммой значений.

АС5♦3 (формула проекции). Докажите, что $\text{ind}(U \otimes \text{res } W) \simeq \text{ind}(U) \otimes W$ для любых представлений W и U группы G и её подгруппы H соответственно.

АС5♦4. Пусть конечная группа G имеет (автоматически нормальную) подгруппу H индекса 2. Обозначим через $\text{sgn}: G \rightarrow \pm 1$ композицию эпиморфизма $G \twoheadrightarrow G/H$ и нетривиального одномерного представления группы $G/H \simeq \mathbb{Z}/(2)$, а для каждого представления $\varrho: H \rightarrow \text{GL}(V)$ обозначим через $\varrho' = \varrho \circ \text{Ad}_g$ его композицию с автоморфизмом сопряжения $\text{Ad}_g: H \xrightarrow{\sim} H, h \mapsto ghg^{-1}$, каким-нибудь элементом $g \in G \setminus H$ и будем называть представление ϱ' сопряжённым к ϱ . Покажите, что

- а) с точностью до изоморфизма представление ϱ' не зависит от выбора $g \in G \setminus H$
- б) для каждого неприводимого представления W группы G имеется следующая альтернатива: либо $W \simeq W \otimes \text{sgn}$, и его ограничение $\text{res}_H^G W \simeq V \oplus V'$ является суммой двух сопряжённых неприводимых представлений V, V' подгруппы H , причём $\text{ind}_H^G V \simeq \text{ind}_H^G V' \simeq W$, либо $W \not\simeq W \otimes \text{sgn}$, ограничение $V = \text{res}_H^G W$ неприводимо и изоморфно своему сопряжённому, а $\text{ind}_H^G V \simeq W \oplus (W \otimes \text{sgn})$
- в) каждое неприводимое представление подгруппы H является либо ограничением, либо одним из двух сопряжённых друг другу неприводимых прямых слагаемых в ограничении некоторого неприводимого представления группы G на H
- г) каждое неприводимое представление группы G либо индуцировано неприводимым представлением подгруппы H , либо является одним из двух отличающихся друг от друга тензорным умножением на sgn неприводимых прямых слагаемых представления, индуцированного неприводимым представлением подгруппы H
- д) число тех классов сопряжённости группы H , которые остаются таковыми и в группе G , равно числу классов сопряжённости группы G , не содержащихся в H .

АС5♦5. Посмотрите, как результаты предыдущей задачи соотносятся с представлениями групп а) D_n и $\mathbb{Z}/(n)$ б) S_3 и A_3 в) S_4 и A_4 г*) S_5 и A_5 .

АС5♦6. Покажите, что представление группы S_n левыми умножениями в левом идеале¹ $\mathbb{C}[S_n] r_T$ индуцировано с тривиального представления подгруппы $R_T \subset S_n$, а в левом идеале $\mathbb{C}S_n c_T$ — со знакового представления подгруппы $C_T \subset S_n$.

АС5♦7. Покажите, что идеал $\mathbb{C}[S_n] s_T$, вообще говоря, не содержится в идеале $\mathbb{C}[S_n] r_T$.

АС5♦8. Укажите, каким модулям Шпехта S_λ изоморфны перечисленные на предыдущих семинарах геометрически заданные неприводимые представления групп: а) S_3 б) S_4 в*) S_5 .

¹Напомним, что с каждым заполнением T клеток диаграммы Юнга λ не повторяющимися числами от 1 до $n = |\lambda|$ связаны *строчная подгруппа* $R_T \subset S_n$, состоящая из всех перестановок, переводящих элементы каждой строки заполнения T в элементы из той же самой строки, и *столбцовая подгруппа* $C_T \subset S_n$, состоящая из всех перестановок, переводящих элементы каждого столбца заполнения T в элементы из того же самого столбца, а также *симметризаторы Юнга* $r_T = \sum_{\sigma \in R_T} \sigma$, $c_T = \sum_{\sigma \in C_T} \text{sgn}(\sigma) \sigma$ и $s_T = r_T c_T$, лежащие в групповой алгебре $\mathbb{Z}S_n$.