Матричные группы Ли и их алгебры Ли

Определения. *Матричной* (или *линейной*) вещественной *группой Ли* называется любая подгруппа G в полной линейной группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ или $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, являющаяся гладким (вещественным) подмногообразием *аффинного* вещественного пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ или $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ соответственно. Векторное подпространство в *векторном* пространстве матриц, состоящее из всех векторов, касательных к G в точке g, обозначается T_g и называется *касательным пространством* к G в точке g. Касательное пространство T_E в единице $E \in G$ называется *алгеброй Ли* группы G и обозначается $\mathfrak{g}$. *Комплексной* матричной группой Ли называется подгруппа $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, являющаяся гладким комплексным подмногообразием комплексного аффинного пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$. Касательные пространства T_g и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ комплексной группы G являются комплексными векторными пространствами.

AC6⋄1. Пусть $G \subset \mathrm{GL}_n$ — матричная группа Ли. Покажите, что **а)** G замкнута в GL_n **б)** содержащая единицу компонента связности G_E группы G является нормальной подгруппой в G, а все остальные компоненты связности являются её смежными классами **в)** связная группа порождается (как абстрактная группа) любой открытой окрестностью единицы **г)** $T_g = gT_E = T_E g$ и $gT_E g^{-1} = T_E$ для всех $g \in G$.

AC6⋄2. Докажите, что следующие группы являются вещественными матричными группами Ли, опишите их алгебры Ли и найдите их размерности:

а) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ **б)** $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid FF^t = E\}$ и $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

в) $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{F \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid F\Omega F^t = \Omega\}$, где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$

г) $\mathrm{U}_n = \{F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid F\overline{F}^t = E\}$ и $\mathrm{SU}_n = \mathrm{U}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

AC6⋄3. Докажите, что следующие группы являются комплексными матричными группами Ли, опишите их алгебры Ли и найдите их (комплексные) размерности: **а)** $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ **б)** $\mathrm{O}_n(\mathbb{C}) = \{F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid FF^t = E\}$ и $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ **в)** $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \{F \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid F\Omega F^t = \Omega\}$.

AC6⋄4. Сколько компонент связности у групп **а)** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ **б)** $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ **в)** $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ и $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ **г)** $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ и $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ **д)** U_n и SU_n **е*)** группы Лоренца[1] $\mathrm{SO}_{n,1}$.

AC6⋄5 (присоединённое представление). Линейное представление $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto \mathrm{Ad}_g$, где $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $x \mapsto gxg^{-1}$, называется *присоединённым*. Вычислите его дифференциал в единице $\mathrm{ad} \stackrel{\text{def}}{=} d_E \mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto \mathrm{ad}_x$, т. е. опишите, как действует линейный эндоморфизм $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, в который этот дифференциал переводит матрицу $x \in \mathfrak{g}$.

AC6⋄6. Докажите, что ядро присоединённого представления линейной группы Ли совпадает с её центром.

AC6⋄7. Пусть $f : G \to H$ — гладкий гомоморфизм линейных групп Ли. Покажите, что

$$d_e f(\mathrm{Ad}_g(x)) = \mathrm{Ad}_{f(g)}(d_e f(x)) \text{ для всех } g \in G \text{ и } x \in \mathfrak{g} = T_e.$$

AC6⋄8. Убедитесь, что присоединённое представление группы SU_2 в пространстве $\mathfrak{su}_2$ бесследных косоэрмитовых 2×2-матриц совпадает с действием группы кватернионов нормы 1 сопряжениями на пространстве чисто мнимых кватернионов и таким образом задаёт эпиморфизм $\mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ с ядром $\pm E$.

AC6⋄9. Убедитесь, что присоединённое представление группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ в пространстве $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ бесследных комплексных 2×2-матриц сохраняет симметричную невырожденную (комплексно) билинейную форму $(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$ на этом пространстве и таким образом задаёт эпиморфизм $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ с ядром $\pm E$. Иными словами, $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

AC6⋄10. Убедитесь, что присоединённое представление группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ в пространстве $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ бесследных вещественных 2×2-матриц задаёт эпиморфизм группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ на связную компоненту группы $\mathrm{SO}_{2,1}$ с ядром $\pm E$.

[1] Она состоит из линейных операторов на $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющих квадратичную форму сигнатуры $(n, 1)$.