§3. Алгебраические многообразия.

На протяжении этого параграфа мы продолжаем предполагать, что основное поле $\Bbbk$ является алгебраически замкнутым.

3.1. Локальные регулярные функции. Рассмотрим непустое открытое подмножество U аффинного алгебраического многообразия X. Функция $U \xrightarrow{f} \Bbbk$ называется *регулярной* в точке $u \in U$, если существуют $p, q \in \Bbbk[X]$, такие что $q(u) \neq 0$ и $f(x) = p(x)/q(x)$ $\forall\, x \in \mathscr{D}(q) \cap U$. Функции $U \xrightarrow{f} \Bbbk$, регулярные в каждой точке $u \in U$, образуют коммутативное кольцо, обозначаемое $\mathscr{O}_X(U)$ или $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$. Оно называется *кольцом локальных регулярных функций* на $U \subset X$.

3.1.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Если X неприводимо, то $\mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h)) = \Bbbk[X][h^{-1}]$ $\forall h \in \Bbbk[X]$. Иными словами, каждая регулярная функция $f \in \mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h))$ записывается в виде $f(x) = r(x)/h^d(x)$ с подходящими $r \in \Bbbk[X]$, $d \in \mathbb{N}$ (в частности, для $h \equiv 1$, мы получим $\mathscr{O}_X(X) = \Bbbk[X]$).*

Доказательство. Если $f \in \mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h))$, то $\forall\, u \in \mathscr{D}(h)$ $\exists\, p_u, q_u \in \Bbbk[X]$ такие, что $q_u(u) \neq 0$ и $f(x) = p_u(x)/q_u(x)$ $\forall\, x \in \mathscr{D}(q_u) \cap \mathscr{D}(h)$. Поскольку $\bigcap\limits_{u \in U} V(q_u) \subset V(h)$, по теореме Гильберта о нулях найдутся $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathscr{D}(h)$, такие что $h^d = \sum q_{u_\nu} g_\nu$ для подходящих $g_1, g_2, \dots, g_m \in \Bbbk[X]$ и $d \in \mathbb{N}$. В то же время, для каждого ν мы имеем равенство $f(x)\, q_{u_\nu}(x) = p_{u_\nu}(x)$, которое выполняется для всех $x \in \mathscr{D}(h)$, включая те, для которых $q_{u_\nu}(x) = 0$. Действительно, пусть $q_{u_\nu}(w) = 0$ для некоторого $w \in \mathscr{D}(h)$. Тогда, переписывая $f = p_{u_\nu}/q_{u_\nu}$ как p_w/q_w с $q_w(w) \neq 0$, мы получим $p_{u_\nu}(x)\, q_w(x) = q_{u_\nu}(x)\, p_w(x)$ для всех $x \in \mathscr{D}(h \cdot q_{u_\nu} \cdot q_w)$, а значит (см. упр. 2.7), вообще для всех $x \in X$. В частности $p_{u_\nu}(w) = q_{u_\nu}(w)\, p_w(w)/q_w(w) = 0 = f(w)\, q_{u_\nu}(w)$. Таким образом, $f\, h^d = \sum f\, q_{u_\nu}\, g_\nu = \sum p_{u_\nu}\, g_\nu \in \Bbbk[X]$. □

3.1.2. СЛЕДСТВИЕ. *Каждое главное открытое подмножество $\mathscr{D}(f) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][f^{-1}]$ неприводимого аффинного многообразия X является аффинным алгебраическим многообразием, и включение $\mathscr{D}(f) \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом, отвечающим вложению алгебр $\Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[X][f^{-1}]$.* □

3.2. Структурный пучок. Соответствие[1] $\mathscr{O}_X : U \longmapsto \mathscr{O}_X(U)$ называется *структурным пучком* аффинного алгебраического многообразия X. Отметим, что функция $U \xrightarrow{f} \Bbbk$ на объединении открытых множеств $U = \bigcup W_i$ регулярна тогда и только тогда, когда регулярно каждое ограничение $f\,|_{W_i}$, и наоборот, для любого набора локальных регулярных функций $W_i \xrightarrow{f_i} \Bbbk$, таких что $f_i \equiv f_j$ на $W_i \cap W_j$, существует единственная регулярная функция $f \in \mathscr{O}_X(\cup W_i)$, ограничение которой на каждое W_i совпадает с f_i — последнее условие, собственно, и означает что предпучок $U \longmapsto \mathscr{O}_X(U)$ является *пучком*.

Отметим, что хотя следствие n° 3.1.2 и утверждает, что открытые множества являются *локально* аффинными, произвольное открытое подмножество U аффинного алгебраического множества X обычно аффинным алгебраическим многообразием *не является*: во-первых, алгебра $\mathscr{O}_X(U)$ может оказаться не конечно порожденной, во-вторых, даже когда она конечно порождена, биекции между $\operatorname{Spec_m} \mathscr{O}_X(U)$ и точками U может и не быть.

Упражнение 3.1. Пусть $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$ — дополнение к началу координат. Покажите, что $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n}(U) = \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ при $n \geqslant 2$.

Указание. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathscr{D}(x_i)$ и утверждение n° 3.1.1.

Упражнение 3.2. Покажите, что открытое подмножество U аффинного многообразия является аффинным , если и только если найдутся $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathscr{O}_X(U)$, такие что идеал $(f_1, f_2, \dots, f_m) = \mathscr{O}_X(U)$ и каждое из подмножеств $U_i = \{p \in U \mid f_i(p) \neq 0\}$ является аффинным многообразием.

3.3. Алгебраические многообразия. Открытое подмножество $U \subset X$ топологического пространства X называется *алгебраической аффинной картой*, если существует аффинное алгебраическое многообразие X_U (рассматриваемое как топологическое пространство с топологией

[1] понимаемое как контравариантный функтор из категории открытых подмножеств $U \subset X$ в категорию $\Bbbk$-алгебр

Зарисского) и *гомеоморфизм* $X_U \xrightarrow{\varphi_U} U$. Две алгебраических карты $X_U \xrightarrow{\varphi_U} U$ и $X_W \xrightarrow{\varphi_W} W$ на X называются *совместимыми*, если *гомеоморфизм склейки*

$$\varphi_{WU} = \varphi_W \circ \varphi_U^{-1} \;:\; X_U \supset \varphi_U^{-1}(U \cap W) \xrightarrow{\sim} \varphi_W^{-1}(U \cap W) \subset X_W$$

является *регулярным изоморфизмом* в том смысле, что его гомоморфизм поднятия

$$\Gamma\left(\varphi_W^{-1}(U \cap W)\,,\,\mathscr{O}_{X_W}\right) \xrightarrow{\varphi_{WU}^*} \Gamma\left(\varphi_U^{-1}(U \cap W)\,,\,\mathscr{O}_{X_U}\right)$$

является корректно определенным изоморфизмом $\Bbbk$-алгебр. Открытое покрытие $X = \bigcup U_\nu$ попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на X. Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также представляет собой алгебраический атлас. Топологическое пространство X, снабженное классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются многообразиями *конечного типа*.

Упражнение 3.3. Проверьте, что все проективные пространства, грассманианы, а также подмножества в $\mathbb{P}_{n_1} \times \mathbb{P}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{P}_{n_m}$, задаваемые системами мультиоднородных полиномиальных уравнений, являются алгебраическими многообразиями конечного типа.

3.3.1. Пример: прямое произведение $X \times Y$ алгебраических многообразий X, Y является алгебраическим многообразием. Его атлас состоит из всех попарных произведений $U \times W$, где $U \subset X$, $W \subset X$ суть аффинные алгебраические карты на X, Y.

3.3.2. Пример: отделимость. Стандартный атлас на $\mathbb{P}_1$ состоит из двух карт $\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i \subset \mathbb{P}_1$, $i = 0, 1$, причём пересечение $\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\}$ видно в каждой из карт как дополнение к началу координат. Карты $U_{0,1} = \mathbb{A}^1$ склеены друг с другом вдоль $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}$ посредством отображения $\varphi_{01} : t \mapsto 1/t$. Если мы заменим его на тождественное отображение $\widetilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t$, то мы получим другое многообразие — прямую с «раздвоенной точкой»: .
Такая патология называется *неотделимостью*. Возникла она из-за того, что второе правило склейки не замкнуто: его можно «непрерывно продолжить» с $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}$ на всё $\mathbb{A}^1 = \overline{\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}}$.

Формализуется это так. Включения $U_0 \hookleftarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$ задают вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$. Так, для $\mathbb{P}_1$ получится вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по правилу $t \mapsto (t\,,\,t^{-1})$, отождествляющее $U_0 \cap U_1$ с замкнутым подмножеством $V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2 = U_0 \times U_1$. Во втором примере, вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ задается правилом $t \mapsto (t\,,\,t)$, и его образ не замкнут — это открытое подмножество $\Delta \smallsetminus \{(0,0)\}$ диагонали $\Delta = V(x - y) \subset \mathbb{A}^2$.

Алгебраическое многообразие X называется *отделимым*, если для любой пары аффинных карт U, W на X образ канонического вложения $U \cap W \hookrightarrow U \times W$ замкнут. Поскольку этот образ есть не что иное, как пересечение диагонали $\Delta \subset X \times X$ с аффинной картой $U \times W$ на $X \times X$, многообразие X отделимо, если и только если диагональ $\Delta \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Например, $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{P}_n$ отделимы, поскольку диагонали в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ и в $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ задаются, соответственно, уравнениями $x_i = y_i$ и $x_i y_j = x_j y_i$.

3.3.3. Регулярные функции и морфизмы. Функция $X \xrightarrow{f} \Bbbk$ называется *регулярной* в точке x, если её ограничение на некоторую аффинную окрестность этой точки является там регулярной функцией в смысле n° 3.1 в какой-нибудь открытой окрестности U точки x. Функции $U \longrightarrow \Bbbk$ на открытом подмножестве $U \subset X$, регулярные в каждой точке этого подмножества, образуют коммутативное кольцо $\mathscr{O}_X(U)$, и соответствие $U \longmapsto \mathscr{O}_X(U)$ называется *структурным пучком* многообразия X. Отображение алгебраических многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *регулярным*, если $\forall x \in X$ и любой локальной регулярной функции $f \in \mathscr{O}_Y(W)$, определённой в какой-либо окрестности W точки $\varphi(x)$, существует окрестность $U \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x, такая что $\varphi^*(f) \in \mathscr{O}_X(U)$. Иными словами, над каждым открытом $U \subset Y$ гомоморфизм поднятия должен быть корректно определенным гомоморфизмом колец локальных регулярных функций. В частности, множество регулярных морфизмов $X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ совпадает с $\mathscr{O}_X(X)$.

3.3.4. Рациональные отображения. Регулярный морфизм $U \xrightarrow{\varphi} Y$, определенный на некотором открытом плотном подмножестве U алгебраического многообразия X, называется *рациональным отображением* из X в Y. Формально говоря, рациональное отображение (в теоретикомножественном смысле) не является отображением «из X», ибо определено не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают в алгебраической геометрии.

3.3.5. Пример: проекция $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, переводящая точку $A \in \mathbb{A}^n$ в прямую[2] $(OA) \in \mathbb{P}_n$ является сюрьективным рациональным морфизмом, определенным на $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$. В стандартной аффинной карте $\mathbb{A}^n \xrightarrow{\varphi_i} U_i = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{P}_n \mid t_i = 1\}$, соответствующий гомоморфизм поднятия

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}_n}(U_i) = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \xrightarrow{\pi^*} \Bbbk[t_0, t_1, \dots, t_n]\left[t_i^{-1}\right] = \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}(\mathscr{D}(t_i)) = \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}(\pi^{-1}(U_i))$$

переводит $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в $\widetilde{f}(t_0, t_1, \dots, t_n) = f(t_0/t_i, \dots, t_{i-1}/t_i, t_{i+1}/t_i, \dots, t_n/t_i)$.

3.4. Замкнутые подмногообразия. Каждое замкнутое подмножество $Z \subset X$ алгебраического многообразия X имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для каждой аффинной карты U пересечение $Z \cap U$ есть замкнутое подмножество U, т. е. аффинное алгебраическое множество $\mathrm{Spec_m}\,(\mathscr{O}_X(U)/\mathscr{I}_Z(U))$, где $\mathscr{I}_Z(U) = \{f \in \mathscr{O}_X(U) \mid f|_Z \equiv 0\}$ есть идеал $Z \cap U$ в U. Соответствие $U \longmapsto \mathscr{I}_Z(U)$ называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия $Z \subset X$. Он является подпучком структурного пучка и состоит из всех локальных регулярных функций, тождественно обращающихся в нуль на Z. Регулярный морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *замкнутым вложением*, если $\varphi(X) \subset Y$ является замкнутым подмногообразием и φ устанавливает изоморфизм между X и $\varphi(X)$. Например, алгебраическое многообразие X является аффинным тогда и только тогда, когда оно допускает замкнутое вложение в аффинное пространство. Будем называть многообразие X *аффинным* (соотв. *проективным*), если оно допускает замкнутое вложение $X \hookrightarrow \mathbb{A}^m$ (соотв. $X \hookrightarrow \mathbb{P}_m$) для некоторого m.

Упражнение 3.4. Убедитесь, что аффинные и проективные алгебраические многообразия, понимаемые как подмножества в аффинном (соотв. проективном) пространстве, заданные системой полиномиальных (соотв. однородных полиномиальных) уравнений являются аффинными (соотв. проективными) многообразиями в смысле предыдущего определения.

3.4.1. Пример: замкнутое подмногообразие $X \subset Y$ отделимого многообразия Y тоже отделимо, поскольку диагональ в $X \times X$ является прообразом диагонали в $Y \times Y$ при вложении $X \times X \hookrightarrow Y \times Y$. В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделимо и имеет конечный тип.

3.4.2. Пример: график морфизма. Пусть $X \xrightarrow{\varphi} Y$ — регулярный морфизм. Прообраз диагонали $\Delta \subset Y \times Y$ при индуцированном морфизме $X \times Y \xrightarrow{\varphi \times \mathrm{Id}_Y} Y \times Y$ называется *графиком* φ и обозначается через Γ_φ. Геометрически, $\Gamma_\varphi = \{(x, f(x))\} \subset X \times Y$. Если Y отделимо, то график замкнут. Например, график регулярного морфизма аффинных многообразий $\mathrm{Spec_m}\,(A) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Spec_m}\,(B)$ задается в $A \otimes B$ системой уравнений $1 \otimes f = \varphi^*(f) \otimes 1$, где f пробегает B.

3.4.3. Пример: семейства замкнутых подмногообразий. Каждый регулярный морфизм $X \xrightarrow{\pi} Y$ может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий $X_y = \pi^{-1}(y) \subset X$, параметризованное точками $y \in Y$. Если $X \xrightarrow{\pi} Y$, $X' \xrightarrow{\pi'} Y$ — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм $X \xrightarrow{\varphi} X'$ называется *морфизмом семейств* (или морфизмом *над* Y), если он переводит X_y в X'_y для каждого $y \in Y$, т. е. если $\pi = \pi' \circ \varphi$. Семейство $X \xrightarrow{\pi} Y$ называется *постоянным* или *тривиальным*, если оно изоморфно над Y прямому произведению $X_0 \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$ для некоторого многообразия X_0.

3.4.4. Пример: раздутие точки $p \in \mathbb{P}_n$. Прямые, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, образуют проективное пространство $E \simeq \mathbb{P}_{n-1}$, которое можно отождествить с любой не содержащей p гиперплоскостью $H \subset \mathbb{P}_n$. График инцидентности $\mathscr{B}_p = \{(\ell, q) \in E \times \mathbb{P}_n \mid q \in \ell\}$ называется *раздутием* точки $p \in \mathbb{P}_n$. Проекция

$$\mathscr{B}_p \xrightarrow{\sigma_p} \mathbb{P}_n$$

[2] рассматриваемую как одномерное векторное подпространство в V

биективна всюду над $\mathbb{P}_n \smallsetminus \{p\}$, однако прообраз самой точки p совпадает с E, и тем самым, имеет коразмерность 1 в $\mathscr{B}_p$. Он называется *исключительным дивизором*. Вторая проекция

$$\mathscr{B}_p \xrightarrow{\varrho_E} E$$

реализует $\mathscr{B}_p$ как *линейное расслоение* над E, слой которого над точкой $q \in E$ — это прямая $(pq) \subset \mathbb{P}_n$. Это расслоение называется *тавтологическим* линейным расслоением над E.

Иными словами, раздутие точки p можно представлять себе как результат выкалывания этой точки с последующей вклейкой в образовавшееся точечное отверстие целого проективного пространства E, параметризующего все проходящие через p прямые, так чтобы при подходе к точке p вдоль любой прямой мы попадали в отвечающую этой прямой точку пространства E.

Если фиксировать однородные координаты $(t_0 : t_1 : \ldots : t_n)$ на $\mathbb{P}_n$ так, чтобы $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$, и отождествить E с гиперплоскостью $H = \{(0 : q_1 : \ldots : q_n)\} \subset \mathbb{P}_n$, то условие $(q,t) \in \mathscr{B}_p$ будет равносильно системе квадратичных уравнений

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_1 & \cdots & q_n \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} = 2\,, \quad \text{или} \quad q_i t_j = q_j t_i \quad \forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n\,.$$

Таким образом, $\mathscr{B}_p$ есть замкнутое подмногообразие $H \times \mathbb{P}_n$.

3.5. Замкнутые морфизмы. Регулярный морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *замкнутым*, если $\varphi(Z) \subset Y$ замкнуто для любого замкнутого $Z \subset X$. Любое замкнутое вложение замкнуто. Из утверждения n° 2.5.1 вытекает, что всякий конечный морфизм аффинных многообразий замкнут.

3.5.1. ЛЕММА. *Проекция $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$ замкнута.*

Доказательство. Зафиксируем однородные координаты t на $\mathbb{P}_n$ и аффинные координаты x на $\mathbb{A}^n$. Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ задаётся некоторой системой полиномиальных уравнений $f_\nu(t,x) = 0$ (однородных по t). Его образ $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$ состоит из всех точек p, при подстановке которых вместо x будет получаться система однородных уравнений $f_\nu(t,p) = 0$ на t, задающая непустое подмногообразие в $\mathbb{P}_n$. Как мы видели в n° 1.5.3, последнее условие равносильно тому, что коэффициенты форм $f_\nu(t,p)$, являющиеся полиномами от p, удовлетворяют системе результантных полиномиальных уравнений. □

3.5.2. СЛЕДСТВИЕ. *Если многообразие X проективно, то проекция $X \times Y \longrightarrow Y$ замкнута для любого многообразия Y.*

Доказательство. Ограничиваясь на аффинные карты в Y, мы можем считать Y аффинным. Тогда $X \times Y$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$, и наша проекция получается ограничением замкнутого отображения $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ на замкнутое подмножество $X \times Y \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$. □

3.5.3. СЛЕДСТВИЕ. *Если X проективно, а Y отделимо, то любой морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ замкнут.*

Доказательство. Для каждого замкнутого $Z \subset X$ произведение $Z \times Y$ замкнуто в $X \times Y$. Поскольку Y отделимо, график $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ тоже замкнут. Но $\varphi(Z)$ есть образ $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y)$ при проекции $X \times Y \longrightarrow Y$, которая замкнута. □

3.5.4. СЛЕДСТВИЕ. *Любое регулярное отображение из связного проективного многообразия X в любое аффинное многообразие постоянно (т. е. стягивает X в одну точку). В частности, $\mathscr{O}_X(X) = \Bbbk$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть отображения $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^n$. Беря композицию такого отображения с координатными формами $\mathbb{A}^n \xrightarrow{x_i} \mathbb{A}^1$, мы сводим утверждение к случаю $n = 1$. Отождествляя $\mathbb{A}^1$ с аффинной картой на $\mathbb{P}_1$, получаем регулярное несюрьективное отображение $X \longrightarrow \mathbb{P}_1$, образ которого замкнут и связен, т. е. является одной точкой. □

3.5.5. Конечные морфизмы. Регулярный морфизм алгебраических многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *конечным*, если прообраз $W = \varphi^{-1}(U)$ любой аффинной карты $U \subset Y$ является аффинной картой на X, и ограничение $W \xrightarrow{\varphi_W} U$ является конечным морфизмом (аффинных многообразий). Из n° 2.5.1 следует, что каждый конечный морфизм замкнут и ограничение конечного морфизма на замкнутое подмногообразие $Z \subset X$ также конечный морфизм. Более того, если X неприводимо, то собственное замкнутое подмножество $Z \subset X$ переходит в *собственное* замкнутое подмножество Y.

3.5.6. Пример: проекция любого проективного многообразия $X \subsetneq \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \notin X$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ является конечным морфизмом. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим аффинную карту $U \subset H$ и зафиксируем на $\mathbb{P}_n$ однородные координаты $(t_0 : t_1 : \ \dots : t_n)$, в которых

$$\begin{aligned} p &= (1 : 0 : \ \dots : 0) \\ H &= \{(0 : q_1 : \ \dots : q_n)\} \\ U &= \{u = (0 : u_1 : \ \cdots : u_{n-1} : 1)\} \end{aligned}$$

(как в n° 3.4.4). Поскольку $p \notin X$, прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset X$ лежит внутри проколотого конуса над U (с выколотой вершиной p), который изоморфен (как алгебраическое многообразие) аффинному пространству $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$. Изоморфизм задаётся ограничением на конус морфизма раздутия $\mathscr{B}_p \xrightarrow{\sigma_p} \mathbb{P}_n$ и в терминах координат представляет собою подстановку $t = \vartheta p + u$, где $\vartheta \in \mathbb{A}^1$, $u \in U$. Если X задаётся системой однородных уравнений $f_\nu(t) = 0$, то в аффинных координатах (u, ϑ) на $U \times \mathbb{A}^1$ прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U)$ будет описываться уравнениями

$$f_\nu(\vartheta p + u) = \alpha_0^{(\nu)}(u)\,\vartheta^m + \alpha_1^{(\nu)}(u)\,\vartheta^{m-1} + \ \cdots + \alpha_m^{(\nu)}(u) = 0\,. \tag{3-1}$$

Тем самым, Y является аффинным алгебраическим многообразием. Чтобы убедиться в том, что алгебра $\Bbbk[Y] = \Bbbk[u][\vartheta]/(f_\nu(\vartheta p + u))$ конечно порождена как $\Bbbk[u]$-модуль, достаточно найти в идеале, порождённом уравнениями (3-1), хотя бы одно уравнение со старшим коэффициентом $\alpha_0(u) \equiv 1$ (ибо тогда после факторизации по одному только этому уравнению мы уже получим конечно порождённый $\Bbbk[u]$-модуль). Существование такого уравнения равносильно тому, что идеал, порождённый в $\Bbbk[u]$ старшими коэффициентами $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ всех уравнений (3-1), содержит единицу, что по теореме Гильберта равносильно отсутствию у многочленов $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ общих нулей в U. Но если бы такой общий нуль u_0 существовал, то однородные версии уравнений[3] (3-1):

$$f_\nu(\vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u) = \alpha_0^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^m + \alpha_1^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^{m-1}\vartheta_1 + \ \cdots + \alpha_m^{(\nu)}(u_0)\vartheta_1^m = 0$$

имели бы общий корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$ над точкой $u_0 \in U$. Но эти однородные уравнения описывают $X \cap (pu_0)$ в терминах однородных координат $(\vartheta_0 : \vartheta_1)$ на прямой $(pu_0) = \{t = \vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u_0\}$, и корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$ отвечает самой точке p, которая не лежит в X.

Упражнение 3.5. Проверьте, что композиция конечных морфизмов конечна и докажите, что каждое проективное многообразие допускает конечный сюрьективный морфизм на проективное пространство.

3.5.7. СЛЕДСТВИЕ. *Каждое аффинное многообразие X допускает конечный сюрьективный морфизм φ на аффинное пространство.*

Доказательство. Пусть $X \subsetneq \mathbb{A}^n$, где $\mathbb{A}^n$ вложено в $\mathbb{P}_n$ как стандартная карта U_0. Положим $H_\infty \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \smallsetminus U_0$ и обозначим через $\overline{X} \subset \mathbb{P}_n$ проективное замыкание аффинного многообразия X. Проекция $\overline{X}$ из любой точки $p \in H_\infty \smallsetminus \overline{X}$ на любую гиперплоскость $L \not\ni p$, видимую в аффинной карте U как $\mathbb{A}^{n-1} = L \smallsetminus H_\infty$, индуцирует конечный морфизм из $X = \overline{X} \smallsetminus H_\infty$ в это $\mathbb{A}^{n-1}$ (видимый в аффинной карте U как параллельная проекция в направлении вектора p). Если он окажется не сюрьективным, повторим процедуру. $\square$

3.6. Размерность. Максимальное $n \in \mathbb{N}$, для которого существует цепочка неприводимых замкнутых подмножеств

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ \cdots \ \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subset X\ , \tag{3-2}$$

[3]они получаются подстановкой $t = \vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u$ в уравнения, описывающие X в $\mathbb{P}_n$, и связаны с уравнениями (3-1) подстановкой $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (\vartheta : 1)$

называется *размерностью* алгебраического многообразия X в данной точке $x \in X$ и обозначается через $\dim_x X$. Разумеется, когда X неприводимо, во всякой такой максимальной цепочке мы будем иметь $X_n = X$. Если же X приводимо, то $\dim_x X$ равна максимуму из размерностей всех проходящих через x неприводимых компонент.

Упражнение 3.6. Покажите, что $\dim_p X = \dim_p U$ для каждой аффинной карты $U \ni p$.

Указание. Пусть $X_1, X_2 \subset X$ — два замкнутых неприводимых подмножества и $U \subset X$ — открытое множество, такое что оба пересечения $X_1 \cap U$, $X_2 \cap U$ непусты. Тогда $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_1 \cap U$, поскольку $X_i = \overline{X_i \cap U}$.

Упражнение 3.7. Докажите, что $\dim_x X \geqslant \dim_{\varphi(x)} Y$ для любого сюрьективного морфизма неприводимых многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ в любой точке $x \in X$.

Указание. Для любой цепочки (3-2) в Y для каждого i найдётся неприводимая компонента $\varphi^{-1}(X_i)$, сюрьективно отображающаяся на X_i. Это дает цепочку (3-2) в X.

3.6.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Пусть $X \xrightarrow{\varphi} Y$ — конечный морфизм неприводимых многообразий, и $x \in X$. Тогда $\dim_x X \leqslant \dim_{\varphi(x)} Y$ и равенство равносильно тому, что $\varphi(X) = Y$.*

Доказательство. Согласно упр. 3.6 достаточно считать X и Y аффинными. Утверждение из n° 2.5.1 показывает, что каждая цепочка (3-2) в X порождает цепочку $\dots \subsetneq \varphi(X_i) \subsetneq \varphi(X_{i+1}) \subsetneq \dots$ строго вложенных замкнутых неприводимых подмногообразий в Y, что даёт нужное нам неравенство. В случае $\varphi(X) = Y$ упр. 3.7 даёт противоположное неравенство. □

3.6.2. СЛЕДСТВИЕ. *$\dim_p \mathbb{A}^n = n$ в любой точке $p \in \mathbb{A}^n$.*

Доказательство. Ясно, что $\dim \mathbb{A}^0 = 0$ и $\dim_p \mathbb{A}^n \geqslant n$, поскольку имеется цепочка (3-2), образованная аффинными подпространствами, проходящими через p. Неравенство $\dim_p \mathbb{A}^n \leqslant n$ получается по индукции: последний отличный от $\mathbb{A}_n$ элемент цепочки (3-2) допускает сюрьективный конечный морфизм на собственное аффинное подпространство в $\mathbb{A}_n$, и поэтому его размерность (а значит, и его номер в цепочке) строго меньше n. □

3.6.3. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть X — неприводимое аффинное многообразие и $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^m$ — сюрьективный конечный морфизм. Тогда $\dim_p X = m$ в каждой точке $p \in X$. В частности, m не зависит от выбора φ, а $\dim_p X$ одна и та же для всех $p \in X$.* □

3.6.4. Пример: размерность как степень трансцендентности. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие. Конечный эпиморфизм $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^m$ из следствия n° 3.5.7 соответствует целому расширению $\Bbbk[X] \supset \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m] = \Bbbk[\mathbb{A}^m]$. Таким образом, аффинные координатные функции $u_1, u_2, \dots, u_n$ образуют базис трансцендентности $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$ и $\dim X$ равна степени трансцендентности $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$.

Упражнение 3.8. Докажите, что $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ для любых неприводимых многообразий X, Y.

Указание. Докажите, что произведение конечных сюрьекций $X \longrightarrow \mathbb{A}^n$, $Y \longrightarrow \mathbb{A}^m$ является конечной сюрьекцией $X \times Y \longrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Упражнение 3.9. Пусть $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ неприводим. Покажите, что $\dim V(f) = (n-1)$ в $\mathbb{A}^n$.

Указание. Постройте конечную сюрьективную проекцию $V(f) \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ (ср. с упр. 3.5 и следствием из n° 3.5.7).

3.6.5. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Если X неприводимо, то $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$ для любой непостоянной регулярной функции $f \in \mathscr{O}_X(X)$ и любой точки $p \in V(f)$.*

Доказательство. Мы можем предполагать X аффинным. Фиксируем некоторую конечную сюрьекцию $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^m$ и рассмотрим (как при доказательстве утверждения из n° 2.6.1) отображение

$$\varphi = \pi \times f \,:\, X \xrightarrow{x \mapsto (\pi(x), f(x))} \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1 \,.$$

Оно конечно и сюрьективно отображает X на аффинную гиперповерхность $V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$, заданную минимальным полиномом $\mu_f(u,t) = t^n + \alpha_1(u)\, t^{n-1} + \dots + \alpha_n(u) \in \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m][t]$ функции f над полем $\Bbbk(\mathbb{A}^m)$. Тогда $V(f) = \varphi^{-1}\left(H \cap V(\mu_f)\right)$, где $H \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$ — гиперплоскость, заданная уравнением $t = 0$. Но $H \cap V(\mu_f)$ является в аффинном пространстве $H = \mathbb{A}^m$ гиперповерхностью, заданной уравнением

$\alpha_n(u) = 0$, и согласно упр. 3.9, имеет размерность $m-1$. Остаётся применить утверждение из n° 3.6.1 к конечной сюрьекции $V(f) \xrightarrow{\varphi|_{V(f)}} V(a_n)$. □

3.6.6. СЛЕДСТВИЕ. *На произвольном многообразии X для любого $f \in \Bbbk[X]$ в каждой точке $p \in V(f)$ выполнено неравенство* $\dim_p V(f) \geqslant \dim_p(X) - 1$. □

3.6.7. Регулярные системы уравнений. Если многообразие X приводимо, например, является объединением двух неприводимых компонент $X = X_1 \cup X_2$ одинаковой размерности, то непостоянная функция f, зануляющаяся сразу на целой компоненте, скажем, на X_1, задаёт в X гиперповерхность той же размерности, что и само X. Обращение функции f в нуль на компоенте многообразия X равносильно тому, что f является делителем нуля в $\Bbbk[X]$. Последовательность необратимых функций $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$ называется *регулярной*, если ни при каком i функция

$$f_i \,(\mathrm{mod}\,(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})) \in \Bbbk[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1}) = \Bbbk[V(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})]$$

не делит нуль в этой фактор алгебре. В регулярной последовательности уравнений никакое из уравнений f_i не зануляется тождественно ни на одной из неприводимых компонент многообразия

$$V(f_1, f_2, \dots, f_{i-1}) \subset X\ ,$$

а значит, добавление каждого нового уравнения уменьшает размерность такого подмногообразия в точности на единицу.

3.6.8. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Для любых замкнутых аффинных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$ в каждой точке $x \in X_1 \cap X_2$ выполняется неравенство*

$$\dim_x(X_1 \cap X_2) \geqslant \dim_x(X_1) + \dim_x(X_2) - n\ .$$

Доказательство. Если $X_1 \xhookrightarrow{\varphi_1} \mathbb{A}^n$, $X_2 \xhookrightarrow{\varphi_2} \mathbb{A}^n$ — замкнутые вложения, то $X_1 \cap X_2$ является прообразом диагонали $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ при отображении $X_1 \times X_2 \xhookrightarrow{\varphi_1 \times \varphi_2} \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Внутри $X_1 \times X_2$ он задаётся n уравнениями $(\varphi_1 \times \varphi_2)^*(x_i) = (\varphi_1 \times \varphi_2)^*(y_i)$, являющимися поднятиями линейных уравнений $x_i = y_i$, задающих диагональ Δ в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Осталось применить следствие из n° 3.6.6. □

3.6.9. СЛЕДСТВИЕ. *Если замкнутые проективные многообразия $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n$ удовлетворяют неравенству* $\dim(X_1) + \dim(X_2) \geqslant n$, *то* $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ аффинные конусы X_1', X_2'' образованные одномерными векторными подпространствами в V, составляющими точки проективных многообразий X_1 и X_2 (эти конусы имеют те же самые уравнения, что и X_1, X_2, но только теперь эти уравнения рассматриваются как аффинные). По предыдущему утверждению

$$\dim_O(X_1' \cap X_2'') \geqslant \dim_O(X_1) + 1 + \dim_O(X_2) + 1 - n - 1 \geqslant 1\ .$$

Таким образом, $X_1' \cap X_2''$ не исчерпывается точкой O. □

3.6.10. ТЕОРЕМА. *Для любого доминантного морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant \dim X - \dim Y$$

и существует непустое открытое подмножество $U \subset Y$, над которым

$$\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim_x X - \dim_y Y$$

в каждой точке $x \in \varphi^{-1}(y)$ для всех $y \in U$.

Доказательство. Беря композицию нашего отображения с конечным сюрьективным морфизмом какой-нибудь аффинной окрестности точки $\varphi(x)$ на пространство $\mathbb{A}^m$, мы сводим первое утверждение теоремы к случаю $Y = \mathbb{A}^m = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m]$, $\varphi(x) = 0$. Но тогда $\varphi^{-1}(0)$ является пересечением m гиперповерхностей $V(\varphi^*(u_i)) \subset X$, и требуемое неравенство получается индуктивным применением n° 3.6.6.

В доказательстве второго утверждения мы, не ограничивая общности, можем считать оба многообразия аффинными: $X = \operatorname{Spec_m} A$, $Y = \operatorname{Spec_m} B$, а морфизм φ — ограничением проекции $Y \times \mathbb{A}^m \xrightarrow{\pi} Y$ на замкнутое подмногообразие $X \subset Y \times \mathbb{A}^m$ (см. разложение (2-8) из упр. 2.8). Мы собираемся применить к слоям этой проекции следствие n° 3.5.7.

Для этого рассмотрим проективное замыкание $\overline{X} \subset Y \times \mathbb{P}_m$, выберем гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_m$ и точку $p \in \mathbb{P}_m \smallsetminus H$ так, чтобы сечение $Y \times \{p\} \subset Y \times \mathbb{P}_m$ не содержалось в $\overline{X}$. Тогда послойная проекция из p на H будет удовлетворять условиям n° 3.5.6 во всех слоях, располагающихся над открытым подмножеством $U \subset Y$, дополнительным к $\overline{\pi}\Big(\big(Y \times \{p\}\big) \cap \overline{X}\Big)$, где $Y \times \mathbb{P}_m \xrightarrow{\overline{\pi}} Y$ — проекция вдоль $\mathbb{P}_m$. Таким образом, заменяя Y его открытым подмножеством U (которое можно выбрать главным, т. е. тоже аффинным), мы можем повторить рассуждения из n° 3.5.7 послойно (одновременно во всех слоях проекции π) и построить конечную сюрьекцию $X \xrightarrow{\psi} Y \times \mathbb{A}^n$, ограничение которой на каждый слой $\varphi^{-1}(y)$ конечно и эпиморфно отображает $\varphi^{-1}(y)$ на $\{y\} \times \mathbb{A}^n$. Конечность ψ влечёт равенство $n = \dim X - \dim Y$, а конечность его ограничений на слои — равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = n$. □

3.6.11. СЛЕДСТВИЕ (ТЕОРЕМА ШЕВАЛЛЕ О ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ). *Для любого морфизма алгебраических многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$, множества $X_k \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant k \,\}$ замкнуты в X при всех $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Мы можем предполагать X и Y неприводимыми. Если $\dim Y = 0$ (т. е. Y — точка) теорема тривиально верна для всех k. Пусть теперь $\dim Y = m$ и для всех Y меньшей размерности теорема верна при всех k. Покажем, что она верна для Y. Если $k \leqslant \dim(X) - \dim(Y)$, то $X_k = X$ по предыдущей теореме. Для $k > \dim(X) - \dim(Y)$ заменим Y на $Y' = Y \smallsetminus U$, где U взято из n° 3.6.10, а X — на $X' = \varphi^{-1}(Y')$. Тогда $X_k \subset X'$, $\dim Y' < \dim Y$, и применимо индуктивное предположение. □

Упражнение 3.10. Покажите, что изолированные точки слоёв морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ образуют открытое подмножество в X.

3.6.12. СЛЕДСТВИЕ. *Для любого замкнутого морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ множество*

$$Y_k \overset{\text{def}}{=} \{\, y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geqslant k \,\}$$

замкнуто в Y при всех $k \in \mathbb{Z}$. □

3.6.13. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $X \xrightarrow{\varphi} Y$ — замкнутый морфизм с неприводимыми слоями одной и той же размерности. Если Y неприводимо, то X также неприводимо.*

Доказательство. Пусть $X = X_1 \cup X_2$ приводимо. Каждый слой φ, будучи неприводимым, должен целиком содержаться либо в X_1, либо в X_2, т. е. $Y = Y_1 \cup Y_2$, где

$$Y_1 = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_1\}\,, \quad Y_2 = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_2\}\,.$$

Поскольку и X_1, и X_2 отличны от X, оба подмножества $Y_1, Y_2 \subset Y$ являются собственными. По предыдущему следствию, оба они замкнуты: Y_i можно описать как множество точек в Y, над которыми слои ограничения $X_i \longrightarrow Y$ имеют максимально возможную размерность. Значит, Y тоже приводимо. □