Алгебраические многообразия и спектры.

А3◇1. Пусть $A = \mathscr{C}^0(X)$ — кольцо непрерывных (вещественных или комплексных) функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве X. Верно ли, что

а) отображение $X \xrightarrow{x \mapsto \ker \mathrm{ev}_x} \operatorname{Spec}_m A$ биективно?

б) топология Зарисского на $\operatorname{Spec}_m A$ индуцирует исходную топологию на X?

А3◇2. Пусть $X = \operatorname{Spec}_m A$ — аффинное алгебраическое многообразие. Равносильна ли разложимость A в прямое произведение $A = A_1 \times A_2$ разложимости X в дизъюнктное объединение $X = X_1 \sqcup X_2$ двух собственных замкнутых подмножеств?

Указание. Напомним, что для разложимости алгебры (даже не обязательно коммутативной) в прямое произведение двух подалгебр необходимо и достаточно разложения единицы в сумму двух независимых идемпотентов: $1 = e_1 + e_2$, где $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$.

А3◇3. Докажите, что максимальный спектр конечномерной[1] $\Bbbk$-алгебры есть конечное множество и выведите из этого, что любой конечный морфизм имеет не более чем конечные слои.

А3◇4. Докажите, что проекция аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ из любой точки $p \notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ доминантна.

А3◇5. Покажите, что образ регулярного доминантного морфизма содержит открытое плотное множество.

А3◇6 (лемма Нётер о нормализации). Покажите, что любая гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ допускает конечную сюрьекцию на некоторую гиперплоскость $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$.

А3◇7. Для аффинных алгебраических многообразий $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$, уравнения которых известны,

а) опишите систему уравнений, реализующих $X \times Y$ в качестве подмногообразия в $\mathbb{A}^{n+m}$;

б) покажите, что $X \times Y$ неприводимо, если неприводимы X и Y;

в) выразите $\dim(X \times Y)$ через $\dim X$ и $\dim Y$.

А3◇8. Может ли алгебра регулярных функций $\mathscr{O}_X(U)$ на открытом подмножестве U аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$

а) не быть конечно порожденной $\Bbbk$-алгеброй?

б) быть конечно-порождённой $\Bbbk$-алгеброй, но иметь $\operatorname{Spec}_m \mathscr{O}_X(U) \neq U$?

А3◇9*. Покажите, что изолированные точки слоев $\varphi^{-1}(y)$ регулярного морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ заметают открытое подмножество в X, когда y пробегает Y.

А3◇10* (теорема Шевалле о конструктивности). Докажите, что образ регулярного морфизма алгебраических многообразий *конструктивен* в том смысле, что может быть построен из конечного числа открытых и замкнутых подмножеств при помощи конечного числа объединений, пересечений и операций взятия дополнения.

А3◇11. Покажите, что правило $(t_0 : t_1 : t_2) \longmapsto (t_0^{-1} : t_1^{-1} : t_2^{-1})$ продолжается до рационального отображения $\mathbb{P}_2 \overset{q}{\dashrightarrow} \mathbb{P}_2$, определенного всюду кроме 3 точек. Найдите эти точки, объясните, как действует q на тройке прямых, соединяющих эти точки, и опишите $\operatorname{im} q$.

А3◇12 (график рационального отображения). Графиком $\Gamma_\psi \subset X \times Y$ рационального отображения $X \overset{\psi}{\dashrightarrow} Y$ (определенного на некотором открытом плотном $U \subset X$) называется замыкание (по Зарисскому) множества точек $\{(x, \psi(x)) \in X \times Y \mid x \in U\}$. Например, график тавтологического отображения $\mathbb{A}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{P}_n$, переводящего отличную от начала координат точку $P \in \mathbb{A}^{n+1}$ в точку $(OP) \in \mathbb{P}_n$, представляет собою раздутие $\mathbb{A}^{n+1}$ в начале координат. Опишите график квадратичного преобразования из зад. А3◇11 (в частности, опишите слои его проекций на оба сомножителя).

[1]как векторное пространство над $\Bbbk$