Расширения полей

ТГ2◇1. Найдите минимальный многочлен числа $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$.

ТГ2◇2. Верно ли, что **а)** $\cos 36^\circ \in \mathbb{Q}(\sin 36^\circ)$ **б)** $\sin 36^\circ \in \mathbb{Q}(\cos 36^\circ)$?

ТГ2◇3. Совпадает ли поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-1})$ с полем **а)** $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ **б)** $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}+\sqrt{2})$?

ТГ2◇4. Найдите размерность $\mathbb{Q}$-линейной оболочки вещественных чисел

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{10},\ \sqrt{15},\ \sqrt{30}\,.$$

ТГ2◇5. Найдите степень над $\mathbb{Q}$ поля разложения многочлена **а)** x^4-2 **б)** x^5-2 **в)** x^p-a, где $p\in\mathbb{N}$ простое и $a\in\mathbb{Q}$ не является p-той степенью.

ТГ2◇6. Покажите, что в $\mathbb{F}_p[x]$ многочлен $x^{p^n}-x$ является произведением всех неприводимых над $\mathbb{F}_p$ приведённых многочленов, степени которых делят n.

ТГ2◇7. Покажите, что в результате присоединения к $\mathbb{F}_p$ всех примитивных корней из единицы всех отличных от p простых степеней получится алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{F}}_p$.

ТГ2◇8. Пусть $p\in\mathbb{N}$ — простое, $q=p^n$, и $a\in\mathbb{F}_p^\times$. Покажите, что многочлен x^p-x-a неприводим в $\mathbb{F}_q[x]$ если и только если $p\nmid n$.

ТГ2◇9*. При каких n многочлен $x^{2n}+x^n+1$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$?

ТГ2◇10. Пусть $\operatorname{char}\Bbbk=p>0$. Покажите, что каждый неприводимый многочлен $f\in\Bbbk[x]$ представляется в виде $f(x)=g(x^{p^s})$, где $g\in\Bbbk[x]$ неприводим и сепарабелен. Выведите отсюда, что все корни f в поле его разложения имеют одинаковую кратность p^s.

ТГ2◇11. Пусть $n\not\equiv 2 \pmod 3$. Приводим ли в $\mathbb{Q}[x]$ многочлен **а)** x^n-x+1 **б)** x^n+x+1?

ТГ2◇12. Покажите, что группа правильного n-угольника D_n, порождённая поворотом τ и отражением σ, действует на проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ и на поле рациональных функций $\mathbb{C}(x)$ дробно линейными заменами координаты

$$\tau:\ x\mapsto e^{\frac{2\pi i}{n}}x\,,\quad \sigma:\ x\mapsto x^{-1}\,,$$

и опишите поле её инвариантов $\mathbb{C}(x)^{D_n}\subset\mathbb{C}(x)$.

ТГ2◇13*. Пусть $G=\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$, а её подгруппы $P\subset G$ и $N\subset P$ состоят из преобразований $t\mapsto at+b$ с $a\neq 0$ и $t\mapsto t+b$ соответственно. Покажите, что поля инвариантов

а) $\mathbb{F}_q(t)^N=\mathbb{F}_q(t^q-t)$ **б)** $\mathbb{F}_q(t)^P=\mathbb{F}_q\big((t^q-t)^{q-1}\big)$

в) $\mathbb{F}_q(t)^G=\mathbb{F}_q\left((t^{q^2}-t)^{q+1}/(t^q-t)^{q^2+1}\right)$.

ТГ2◇14*. Пусть $\operatorname{char}\Bbbk=p$, а элементы x и y алгебраически независимы над $\Bbbk$. Найдите степень $[\Bbbk(x,y)\ :\ \Bbbk(x^p,y^p)]$ и покажите, что существует бесконечное множество таких полей $\mathbb{F}$, что $\Bbbk(x^p,y^p)\subset\mathbb{F}\subset\Bbbk(x,y)$.

ТГ2◇15*. Коммутативное кольцо называется *нормальным*, если оно не имеет делителей нуля и целозамкнуто в своём поле частных. Покажите, что целое замыкание нётерова нормального кольца A с полем частных Q_A в любом конечном сепарабельном расширении $L\supset Q_A$ конечно порождено как A-модуль.

ТГ2◇16*. Покажите, что кольцо многочленов над нормальным кольцом нормально.