

Круговые поля и циклические расширения

ТГ4♦1. Выразите $e^{2\pi i/5}$ через квадратные корни, а $\sqrt{13}$ — через $e^{2\pi i/13}$.

ТГ4♦2. Перечислите все подполя кругового поля $\mathbb{K}_8 = \mathbb{Q}[e^{\pi i/4}]$.

ТГ4♦3. Покажите, что при любом простом $p \equiv 3 \pmod{4}$ круговое поле $\mathbb{K}_{4p}$ содержит квадратичное подполе $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$.

ТГ4♦4. Покажите, что каждое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$ содержится в каком-нибудь круговом поле.

ТГ4♦5 (дискриминант кругового поля). Пусть $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ — конечное расширение, $\mathcal{O} \subset \mathbb{K}$ — кольцо целых. Определитель Грама формы следа $\text{sr}(\alpha, \beta) = \text{tr}(\alpha\beta)$, вычисленный в произвольном базисе кольца $\mathcal{O}$ как модуля над $\mathbb{Z}$, называется *дискриминантом* поля $\mathbb{K}$ и обозначается $\Delta(\mathbb{K})$. Пусть $\mathbb{K}_p = \mathbb{Q}[\zeta]$, где $\zeta = e^{2\pi i/p}$, а $p > 2$ простое. Покажите, что:

- а) $\Delta(\mathbb{K})$ не зависит от выбора базиса, а $\Delta(\mathbb{K}_p) = \prod_{1 \leq n < m \leq p-1} (\zeta^n - \zeta^m)$
- б) при всех $1 \leq k \leq p-1$ в поле $\mathbb{K}_p$ выполняется равенство

$$\prod_{j \in \{1, \dots, p-1\} \setminus k} (\zeta^k - \zeta^j) = -\frac{p}{\zeta^k(1 - \zeta^k)}$$

в) $\Delta(\mathbb{K}_p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2}$.

г) Вычислите дискриминант квадратичного подполя в $\mathbb{K}_p$.

ТГ4♦6. Может ли конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ содержать бесконечно много корней из единицы?

ТГ4♦7. Покажите, что поле, содержащее примитивный корень нечётной степени из единицы, также содержит и примитивный корень из единицы вдвое большей степени.

ТГ4♦8. Пусть $\sigma \in \text{Aut}_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}$ и $\mathbb{F} \subset \bar{\mathbb{K}}$ — поле неподвижных точек автоморфизма σ . Есть ли у поля $\mathbb{F}$ конечные расширения с нециклической группой Галуа?

ТГ4♦9. Тот же вопрос максимальное по включению среди не содержащих $\sqrt[3]{5}$ подполе $\mathbb{F} \subset \bar{\mathbb{Q}}$.

ТГ4♦10. Может ли группа Галуа неприводимого многочлена $f \in \mathbb{Q}[x]$, имеющего как вещественные, так и не вещественные комплексные корни, быть абелевой?

ТГ4♦11. Пусть $f \in \mathbb{k}[x]$ — неприводимый приведённый многочлен степени n с дискриминантом $D(f)$. Для произвольного корня $\alpha \in \bar{\mathbb{k}}$ многочлена f обозначим через $N_\alpha : \mathbb{k}[\alpha] \rightarrow \mathbb{k}$ норму примитивного расширения поля $\mathbb{k}$ при помощи α . Докажите, что

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N_\alpha(f'(\alpha)).$$

ТГ4♦12. Пусть в условиях предыдущей задачи $f(x) = x^n + ax + b$, и $\gamma = f'(\alpha)$. Покажите, что $\mathbb{k}[\alpha] = \mathbb{k}[\gamma]$, найдите минимальный многочлен элемента γ над $\mathbb{k}$ и явно выразите $D(f)$ через a , b и n .

ТГ4♦13*. Покажите, что группа Галуа многочлена $x^5 + ax + b \in \mathbb{Q}[x]$ изоморфна группе пятиугольника D_5 , если и только если f неприводим, $D(f) = 4^4 a^5 + 5^5 b^4$ является квадратом в $\mathbb{Q}$, и корни f выражаются через рациональные числа в радикалах.