

Письменный зачёт по геометрии за первые два модуля

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой из задач оценивается в 10 баллов. Один ответ без обоснования оценивается в ноль баллов вне зависимости от того, правильный он или нет. Вклад в итоговую отметку даёт сумма набранных баллов в процентах от 50. Таким образом, максимальный результат за эту работу составляет 140%, а для получения 100% достаточно решить любые 5 из предлагаемых ниже 7 задач.

Задача 1 (10 баллов). Таблица попарных скалярных произведений (e_i, e_j) векторов

$$e_1 = \overrightarrow{AD}, \quad e_2 = \overrightarrow{AB}, \quad e_3 = \overrightarrow{AA_1},$$

составляющих выходящие из A рёбра параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, такова:

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите расстояние и угол между прямыми CC_1 и B_1D_1 .

Задача 2 (10 баллов). Даны координаты векторов a , b и c в евклидовом координатном пространстве \mathbb{R}^3 . Найдите координаты вектора $[[a, b], [a, c]]$.

Задача 3 (10 баллов). Найдите радиус шара, описанного в евклидовом пространстве \mathbb{R}^5 вокруг «пирамиды» с вершиной в точке $(1, 0, 0, 0, 0)$, основанием которой является лежащий в гиперплоскости $x_1 = 0$ правильный четырёхмерный симплекс, описанный около единичного шара с центром в нуле.

Задача 4 (10 баллов). В правильном четырёхмерном симплексе $ABCDE$ обозначим через X середину отрезка, соединяющего центры двумерных граней ABC и CDE . Проходящая через точку X прямая YZ пересекает прямую AE в точке Y , а плоскость BCD — в точке Z . Найдите $\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{YZ}$.

Задача 5 (10 баллов). Обозначим через ϱ_{AB} поворот трёхмерного евклидова пространства на 180° вокруг прямой AB . Для правильного тетраэдра $ABCD$ найдите ось и угол поворота

$$\varrho_{AD} \circ \varrho_{AC} \circ \varrho_{AB}.$$

Задача 6 (10 баллов). Сколько трёхмерных плоскостей симметрии у четырёхмерного куба?

Задача 7 (10 баллов). Верно ли, результат применения к точкам сферы стереографической проекции из её северного полюса N на экваториальную гиперплоскость¹ совпадает с результатом применения к ним инверсии² относительно некоторой сферы с центром в N ?

¹экваториальная гиперплоскость проходит через центр сферы перпендикулярно радиусу, идущему в северный полюс; проекция из точки N на не проходящую через N гиперплоскость сопоставляет каждой точке $P \neq N$ точку пересечения прямой PN с этой гиперплоскостью и не определена в точке $P = N$

²инверсия относительно сферы с центром N сопоставляет каждой точке $P \neq N$ точку пересечения прямой PN с полярной к P относительно сферы гиперплоскостью (т. е. с GMT $X : (\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NX}) = r^2$, где r — радиус сферы) и не определена в точке $P = N$