

ЕГ1♦1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 0, 2, 0)$, $e_2 = (-1, 1, -2, -1)$, $e_3 = (2, 0, -2, -1)$, $e_4 = (0, -1, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 1-ю координаты вектора $v = (13, -4, 8, 1)$ в этом базисе.

ЕГ1♦2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-2, 2, 1, 3), \quad u_2 = (1, -2, -3, 0), \quad u_3 = (-1, 3, 4, 0) \\ u_4 = (1, -4, -2, -3), \quad u_5 = (-1, 2, 2, 1)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (2, -4, 3, -5)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ1♦3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 729 & 162 & -405 \\ 162 & 1800 & -90 \\ -405 & -90 & 1989 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ1♦4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(0, 5, -2, -2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1, 4, -3, -1)$, $(1, 5, -3, -1)$, $(1, 5, -3, 0)$ и $(2, 4, -1, -1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ1♦5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-1}{14} & \frac{18+\sqrt{42}}{28} & \frac{-6+3\sqrt{42}}{28} \\ \frac{18-\sqrt{42}}{28} & \frac{13}{28} & \frac{-9-2\sqrt{42}}{28} \\ \frac{-6-3\sqrt{42}}{28} & \frac{-9+2\sqrt{42}}{28} & \frac{-11}{28} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}-4}{14} & \frac{-6\sqrt{2}+12-2\sqrt{7}}{28} & \frac{-2\sqrt{2}+4+6\sqrt{7}}{28} \\ \frac{-6\sqrt{2}+2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{-5\sqrt{2}-18}{28} & \frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} \\ \frac{-2\sqrt{2}-6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{-13\sqrt{2}-2}{28} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+8}{18} & \frac{12+5\sqrt{3}}{54} & \frac{\sqrt{3}+5}{9} \\ \frac{-4\sqrt{3}-11}{18} & \frac{15-8\sqrt{3}}{54} & \frac{-\sqrt{3}+1}{9} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{9} & \frac{-3-5\sqrt{3}}{27} & \frac{4\sqrt{3}-1}{9} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-8}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{10} & \frac{2+\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{3}-1}{5} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ2◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, -2, 0, -2)$, $e_2 = (-2, 0, 1, -1)$, $e_3 = (-2, -1, 1, 0)$, $e_4 = (1, -1, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (1, 3, 0, 1)$ в этом базисе.

ЕГ2◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1, 1, 0, -1), \quad u_2 = (-1, 1, 2, -2), \quad u_3 = (-4, 0, 4, 2) \\ u_4 = (2, 0, -2, -3), \quad u_5 = (2, 2, 0, 6)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, 5, -3, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ2◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 125 & 5 & -75 \\ 5 & 65 & -15 \\ -75 & -15 & 225 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ2◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, 5, 2, 4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, 5, 2, 4)$, $(2, 6, 2, 4)$, $(0, 5, 1, 6)$ и $(0, 6, 1, 5)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ2◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{2}-1}{9} & \frac{-2\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-\sqrt{2}+8}{18} \\ \frac{2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-7\sqrt{2}+8}{18} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} \end{pmatrix}$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}+1}{5} & \frac{-\sqrt{15}}{15} & \frac{2+\sqrt{3}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{-\sqrt{3}-2}{5} & \frac{-\sqrt{15}}{30} & \frac{\sqrt{3}-8}{10} \end{pmatrix}$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{3}-1}{9} & \frac{-\sqrt{3}-5}{9} & \frac{\sqrt{3}-1}{9} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{9} & \frac{5\sqrt{3}-8}{18} & \frac{4\sqrt{3}+11}{18} \\ \frac{\sqrt{3}+5}{9} & \frac{4\sqrt{3}+5}{18} & \frac{5\sqrt{3}-8}{18} \end{pmatrix}$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{2}+1}{9} & \frac{4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-2\sqrt{2}-2}{9} \\ \frac{-2\sqrt{2}-2}{9} & \frac{5\sqrt{2}+8}{18} & \frac{-7\sqrt{2}+8}{18} \\ \frac{4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-\sqrt{2}+8}{18} & \frac{5\sqrt{2}+8}{18} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГЗ♦1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 1, 2, 0)$, $e_2 = (0, -2, 0, -1)$, $e_3 = (2, 0, 1, 0)$, $e_4 = (1, -2, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-7, -11, -1, -6)$ в этом базисе.

ЕГЗ♦2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2, 1, -2, -1), \quad u_2 = (0, 1, -4, -1), \quad u_3 = (-2, 0, -1, -1) \\ u_4 = (4, 2, -2, -4), \quad u_5 = (2, 0, 2, 0)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, 6, -3, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГЗ♦3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 464 & -544 & 256 \\ -544 & 1040 & -320 \\ 256 & -320 & 320 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГЗ♦4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5, 4, -5, -3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(6, 3, -6, -4)$, $(5, 3, -6, -4)$, $(7, 4, -5, -4)$ и $(4, 6, -4, -2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГЗ♦5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}-1}{11} & \frac{3\sqrt{3}+6-\sqrt{11}}{22} & \frac{\sqrt{3}+2+3\sqrt{11}}{22} \\ \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{11}+6}{22} & \frac{\sqrt{3}-9}{22} & \frac{-3\sqrt{3}-6+\sqrt{11}}{22} \\ \frac{\sqrt{3}-3\sqrt{11}+2}{22} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{11}-6}{22} & \frac{5\sqrt{3}-1}{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}+1}{11} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{22}+6}{22} & \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{22}-2}{22} \\ \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{22}+6}{22} & \frac{\sqrt{2}+9}{11} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{22}-6}{22} \\ \frac{\sqrt{2}-3\sqrt{22}-2}{22} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{22}-6}{22} & \frac{5\sqrt{2}+1}{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{6}}{8} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{-\sqrt{6}}{8} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ4♦1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, 2, -2, 1)$, $e_2 = (1, -1, 0, -1)$, $e_3 = (0, -1, 1, -1)$, $e_4 = (-1, 2, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 2-ю координаты вектора $v = (5, 2, -2, 0)$ в этом базисе.

ЕГ4♦2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, -1, 0, 0), \quad u_2 = (2, -3, -1, 0), \quad u_3 = (-4, 1, 2, 0) \\ u_4 = (6, 0, -2, -2), \quad u_5 = (1, -1, -1, 1)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (1, -2, 1, -5)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ4♦3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 125 & 5 & -75 \\ 5 & 65 & -15 \\ -75 & -15 & 225 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ4♦4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-3, 1, 5, 5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-2, 0, 5, 5)$, $(-3, 1, 5, 6)$, $(-3, 0, 5, 6)$ и $(-1, 0, 4, 6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ4♦5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}+8}{34} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{34}+6}{17} & \frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{34}-8}{34} \\ \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{34}+6}{17} & \frac{4\sqrt{2}+9}{17} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{34}-6}{17} \\ \frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{34}-8}{34} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{34}-6}{17} & \frac{13\sqrt{2}+8}{34} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{21\sqrt{6}}{68} & \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{102}}{17} & \frac{-4+3\sqrt{51}}{34} \\ \frac{-3\sqrt{6}+3\sqrt{34}}{34} & \frac{13\sqrt{2}}{17} & \frac{3+\sqrt{51}}{17} \\ \frac{-4\sqrt{6}-9\sqrt{34}}{68} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{102}}{17} & \frac{21}{34} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{9}{-7} & \frac{4}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{-1} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ5♦1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 1, 1, -1)$, $e_2 = (2, 0, -1, 2)$, $e_3 = (1, -1, 0, 2)$, $e_4 = (-2, 2, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 3-ю координаты вектора $v = (1, 5, 1, 0)$ в этом базисе.

ЕГ5♦2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-2, -4, 1, 3), \quad u_2 = (-2, -2, -1, 1), \quad u_3 = (-4, -4, 0, 2) \\ u_4 = (8, 0, 6, 4), \quad u_5 = (2, -2, 3, 3)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-2, 3, -2, 5)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ5♦3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 729 & 162 & -405 \\ 162 & 1800 & -90 \\ -405 & -90 & 1989 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ5♦4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(4, -2, 1, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(4, -1, 1, -1)$, $(3, -3, 2, 1)$, $(4, -2, 2, -1)$ и $(4, -1, 1, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ5♦5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{6}}{19} & \frac{-3\sqrt{2}-3\sqrt{114}}{38} & \frac{-3+3\sqrt{57}}{38} \\ \frac{-3\sqrt{6}+9\sqrt{38}}{76} & \frac{14\sqrt{2}}{19} & \frac{9+\sqrt{57}}{38} \\ \frac{-3\sqrt{6}-9\sqrt{38}}{76} & \frac{9\sqrt{2}-\sqrt{114}}{38} & \frac{14}{19} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-3\sqrt{10}}{10} & 0 & \frac{-\sqrt{10}}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-6}{11} & \frac{1-3\sqrt{33}}{22} & \frac{3+\sqrt{33}}{22} \\ \frac{1+3\sqrt{33}}{22} & \frac{-6}{11} & \frac{-3+\sqrt{33}}{22} \\ \frac{3-\sqrt{33}}{22} & \frac{-3-\sqrt{33}}{22} & \frac{-10}{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{6}-\sqrt{3}}{57} & \frac{-3\sqrt{2}-3\sqrt{38}-6}{38} & \frac{-6\sqrt{3}+6\sqrt{57}-6\sqrt{6}}{76} \\ \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{114}-2\sqrt{3}}{38} & \frac{5\sqrt{2}-9}{19} & \frac{-18\sqrt{3}-2\sqrt{57}-18\sqrt{6}}{76} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{114}+2\sqrt{3}}{38} & \frac{9\sqrt{2}-\sqrt{38}+18}{38} & \frac{-10\sqrt{3}+9\sqrt{6}}{38} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ6◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, 0, -1, -2)$, $e_2 = (0, 2, 2, 0)$, $e_3 = (0, -2, -2, 2)$, $e_4 = (-2, 0, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 3-ю координаты вектора $v = (2, -14, -13, 10)$ в этом базисе.

ЕГ6◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, -6, -5, -2), \quad u_2 = (0, 2, 1, 0), \quad u_3 = (-2, -4, -2, 0) \\ u_4 = (-1, 8, 7, 3), \quad u_5 = (3, 0, -2, -2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (5, -1, 1, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ6◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 272 & -88 & 104 \\ -88 & 200 & -40 \\ 104 & -40 & 296 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ6◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-5, 5, -5, -4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4, 6, -4, -4)$, $(-6, 6, -3, -4)$, $(-6, 7, -4, -3)$ и $(-5, 7, -5, -3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ6◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{\sqrt{6}-2}{6} & \frac{-\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}-2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-2\sqrt{6}+1}{6} \\ \frac{\sqrt{6}-2}{6} & \frac{2\sqrt{6}+1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ \text{б)} \begin{pmatrix} \frac{-9}{10} & \frac{-\sqrt{15}}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-\sqrt{15}}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \\ \text{в)} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{18} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-4\sqrt{3}+6\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24} \\ \frac{-2\sqrt{6}+6-4\sqrt{3}}{36} & \frac{5\sqrt{2}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}-12\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{24} \\ \frac{2\sqrt{6}+6+4\sqrt{3}}{36} & \frac{\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2}{12} & \frac{-10\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{24} \end{pmatrix} \\ \text{г)} \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}-8}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{10} & \frac{2-\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{3}-1}{5} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ7◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, 2, -1, -1)$, $e_2 = (0, 0, -1, 1)$, $e_3 = (-1, 0, 1, 0)$, $e_4 = (1, -1, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-1, 4, -11, 2)$ в этом базисе.

ЕГ7◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, 2, -1, 3), \quad u_2 = (-1, -2, 0, -2), \quad u_3 = (2, 10, -3, 7) \\ u_4 = (1, -2, 2, -2), \quad u_5 = (-2, 0, -2, 2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-5, 1, -1, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ7◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 45 & -9 & 27 \\ -9 & 585 & -27 \\ 27 & -27 & 81 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ7◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-3, -2, 0, 4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4, 0, -1, 3)$, $(-3, -1, 1, 6)$, $(-1, -2, 0, 3)$ и $(-1, -2, 1, 5)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ7◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-5}{9} & \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{1+3\sqrt{3}}{9} \\ \frac{1+3\sqrt{3}}{9} & \frac{-13}{18} & \frac{-4+3\sqrt{3}}{18} \\ \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{-4-3\sqrt{3}}{18} & \frac{-13}{18} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{6}-\sqrt{3}}{27} & \frac{-4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{9} \\ \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{27} & \frac{5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-14\sqrt{3}-8\sqrt{6}}{36} \\ \frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{27} & \frac{\sqrt{2}+8}{18} & \frac{-10\sqrt{3}+8\sqrt{6}}{36} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}-1}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{2-\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{3}-8}{10} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}+1}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{3}-2}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{5}}{10} \\ \frac{\sqrt{3}-2}{5} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{3}+8}{10} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ8◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, -1, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 1, -1, -1)$, $e_3 = (-2, 2, 0, -2)$, $e_4 = (0, 2, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-5, -4, 3, 1)$ в этом базисе.

ЕГ8◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (5, -1, -3, -5), \quad u_2 = (-4, 2, 7, 3), \quad u_3 = (-6, 2, 7, 5) \\ u_4 = (-4, 2, 6, 4), \quad u_5 = (-1, 1, 4, 0)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, -1, 1, -2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ8◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 1458 & -162 & -486 \\ -162 & 666 & -90 \\ -486 & -90 & 450 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ8◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(0, -4, 5, 5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1, -4, 6, 6)$, $(2, -5, 6, 7)$, $(1, -4, 6, 5)$ и $(0, -3, 5, 6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ8◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{42} & \frac{-2\sqrt{2}-6\sqrt{7}-4}{28} & \frac{-12\sqrt{3}+2\sqrt{42}-12\sqrt{6}}{56} \\ \frac{-2\sqrt{6}+6\sqrt{21}-4\sqrt{3}}{84} & \frac{13\sqrt{2}-2}{28} & \frac{-6\sqrt{3}-4\sqrt{42}-6\sqrt{6}}{56} \\ \frac{6\sqrt{6}+2\sqrt{21}+12\sqrt{3}}{84} & \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{7}+6}{28} & \frac{-10\sqrt{3}+18\sqrt{6}}{56} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}-4}{14} & \frac{-2\sqrt{3}+4-3\sqrt{14}}{28} & \frac{-6\sqrt{3}+12+\sqrt{14}}{28} \\ \frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{-13\sqrt{3}-2}{28} & \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{14}-6}{28} \\ \frac{-6\sqrt{3}-\sqrt{14}+12}{28} & \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{14}-6}{28} & \frac{-5\sqrt{3}-18}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}+4}{14} & \frac{2\sqrt{3}-4+3\sqrt{14}}{28} & \frac{6\sqrt{3}-12-\sqrt{14}}{28} \\ \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{14}-4}{28} & \frac{13\sqrt{3}+2}{28} & \frac{-3\sqrt{3}-2\sqrt{14}+6}{28} \\ \frac{6\sqrt{3}+\sqrt{14}-12}{28} & \frac{-3\sqrt{3}+2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{5\sqrt{3}+18}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{26+8\sqrt{2}}{34} & \frac{-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-8}{34} & \frac{-\sqrt{102}-3\sqrt{6}+6\sqrt{3}}{51} \\ \frac{6\sqrt{17}+8-8\sqrt{2}}{34} & \frac{13\sqrt{2}+8}{34} & \frac{-\sqrt{102}+3\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{51} \\ \frac{-2\sqrt{17}+6-6\sqrt{2}}{17} & \frac{-\sqrt{34}-3\sqrt{2}+6}{17} & \frac{-9\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{51} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ9◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, -2, 2, -2)$, $e_2 = (2, -1, -1, -2)$, $e_3 = (2, -1, 1, 0)$, $e_4 = (-2, 0, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 3-ю координаты вектора $v = (-10, 1, 6, 11)$ в этом базисе.

ЕГ9◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2, -2, 1, 4), \quad u_2 = (-6, 2, -5, -4), \quad u_3 = (-4, -2, -1, -4) \\ u_4 = (6, 0, 4, 4), \quad u_5 = (-4, 0, -2, -4)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, -2, 2, -1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ9◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 125 & 5 & -75 \\ 5 & 65 & -15 \\ -75 & -15 & 225 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ9◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4, 4, 3, 5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, 6, 4, 5)$, $(-3, 3, 3, 4)$, $(-4, 6, 4, 5)$ и $(-4, 6, 5, 6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ9◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

а)
$$\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} \\ \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{17}+6}{17} & \frac{4\sqrt{3}+9}{17} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} & \frac{13\sqrt{3}+8}{34} \end{pmatrix}$$

б)
$$\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}+2}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{2-2\sqrt{2}}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{12} \end{pmatrix}$$

в)
$$\begin{pmatrix} \frac{13}{18} & \frac{-1+3\sqrt{3}}{9} & \frac{-4-3\sqrt{3}}{18} \\ \frac{-3\sqrt{3}-1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1-3\sqrt{3}}{9} \\ \frac{-4+3\sqrt{3}}{18} & \frac{3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{13}{18} \end{pmatrix}$$

г)
$$\begin{pmatrix} \frac{-4}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{-4}{9} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ10◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 0, 0, -1)$, $e_2 = (-2, -1, -1, 0)$, $e_3 = (2, -2, 1, 2)$, $e_4 = (0, -2, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-12, 3, -6, -7)$ в этом базисе.

ЕГ10◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, 2, 2, 0), \quad u_2 = (1, 2, 0, -1), \quad u_3 = (-1, 0, 3, 2) \\ u_4 = (0, 2, 3, 1), \quad u_5 = (-1, -6, -2, 3)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-4, 3, -3, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ10◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 425 & 5 & -75 \\ 5 & 1025 & -15 \\ -75 & -15 & 225 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ10◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-5, 0, 1, -3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-5, 0, 0, -4)$, $(-6, 1, 3, -2)$, $(-5, 0, 2, -3)$ и $(-4, 0, 2, -2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ10◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{10+\sqrt{2}}{11} & \frac{-3\sqrt{22}+\sqrt{2}-2}{22} & \frac{-\sqrt{66}-3\sqrt{6}+6\sqrt{3}}{66} \\ \frac{6\sqrt{11}+2-2\sqrt{2}}{22} & \frac{5\sqrt{2}+1}{5} & \frac{-\sqrt{66}+3\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{66} \\ \frac{-2\sqrt{11}+6-6\sqrt{2}}{22} & \frac{-\sqrt{22}-3\sqrt{2}+6}{22} & \frac{-9\sqrt{3}-\sqrt{6}}{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} \frac{10}{19} & \frac{3+3\sqrt{57}}{38} & \frac{-3+3\sqrt{57}}{38} \\ \frac{3-3\sqrt{57}}{38} & \frac{14}{19} & \frac{-9-\sqrt{57}}{38} \\ \frac{-3-3\sqrt{57}}{38} & \frac{-9+\sqrt{57}}{38} & \frac{14}{19} \end{pmatrix}$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} \frac{-1}{19} & \frac{3-3\sqrt{19}}{19} & \frac{3+3\sqrt{19}}{19} \\ \frac{3+3\sqrt{19}}{19} & \frac{-9}{19} & \frac{\sqrt{19}-9}{19} \\ \frac{3-3\sqrt{19}}{19} & \frac{-\sqrt{19}-9}{19} & \frac{-9}{19} \end{pmatrix}$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} \frac{8}{19} & \frac{9\sqrt{6}+9\sqrt{38}}{76} & \frac{-9\sqrt{2}+3\sqrt{114}}{38} \\ \frac{-9+3\sqrt{57}}{38} & \frac{2\sqrt{6}}{19} & \frac{-27\sqrt{2}-\sqrt{114}}{38} \\ \frac{9+3\sqrt{57}}{38} & \frac{-27\sqrt{6}+3\sqrt{38}}{76} & \frac{4\sqrt{2}}{19} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ11◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (1, 0, -2, 1)$, $e_3 = (-2, -1, 2, 1)$, $e_4 = (2, -1, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (12, 2, -10, 0)$ в этом базисе.

ЕГ11◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (5, 2, 1, -4), \quad u_2 = (2, 2, 2, -4), \quad u_3 = (3, 0, -1, 0) \\ u_4 = (3, -1, -1, 4), \quad u_5 = (-4, -1, -2, -1)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-2, 2, -2, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ11◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 612 & -18 & -288 \\ -18 & 1602 & -18 \\ -288 & -18 & 612 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ11◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, 3, 4, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1, 2, 4, 0)$, $(3, 4, 4, 1)$, $(1, 2, 5, 0)$ и $(0, 3, 4, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ11◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{-7}{9} & \frac{-4}{9} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{4\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{4\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{2}-1}{9} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{2\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{7\sqrt{2}-8}{18} \\ \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{3}+2}{28} & \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{14}-4}{28} \\ \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{-5\sqrt{3}+18}{28} & \frac{-6\sqrt{3}-\sqrt{14}-12}{28} \\ \frac{-2\sqrt{3}-3\sqrt{14}-4}{28} & \frac{-6\sqrt{3}+\sqrt{14}-12}{28} & \frac{-5\sqrt{3}+4}{14} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ12◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, -2, -1, 1)$, $e_2 = (-1, -1, 0, 1)$, $e_3 = (1, 2, 0, -1)$, $e_4 = (2, 0, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 1-ю координаты вектора $v = (10, 10, -6, -10)$ в этом базисе.

ЕГ12◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-2, -1, 1, 0), \quad u_2 = (-2, 4, 2, -4), \quad u_3 = (-2, 0, -3, -2) \\ u_4 = (0, 1, -4, -2), \quad u_5 = (8, 10, 0, -4)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, -3, 5, -1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ12◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 612 & -18 & -288 \\ -18 & 1602 & -18 \\ -288 & -18 & 612 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ12◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4, -4, 0, 2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4, -3, 1, 3)$, $(-5, -2, -1, 2)$, $(-5, -3, -1, 1)$ и $(-5, -2, 2, 3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ12◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{-\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} \end{pmatrix} \\ \text{б)} \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{-9+\sqrt{51}+6\sqrt{3}}{51} & \frac{-4\sqrt{3}-3\sqrt{17}+8}{34} \\ \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} & \frac{-12-9\sqrt{3}}{51} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{9+\sqrt{51}-6\sqrt{3}}{51} & \frac{-13\sqrt{3}-8}{34} \end{pmatrix} \\ \text{в)} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \\ \text{г)} \begin{pmatrix} \frac{5}{34} & \frac{9-\sqrt{51}}{17} & \frac{12+3\sqrt{51}}{34} \\ \frac{9+\sqrt{51}}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{-9+\sqrt{51}}{17} \\ \frac{12-3\sqrt{51}}{34} & \frac{-9-\sqrt{51}}{17} & \frac{5}{34} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ13◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, -2, -2, 0)$, $e_2 = (-1, 0, 0, 1)$, $e_3 = (1, -1, 1, -1)$, $e_4 = (-1, -1, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (-8, -4, -11, 11)$ в этом базисе.

ЕГ13◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (4, -1, 2, 3), \quad u_2 = (0, 0, 3, 0), \quad u_3 = (-2, -1, -1, -3) \\ u_4 = (3, -1, 3, 2), \quad u_5 = (4, -4, 5, 0)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-5, 3, -1, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ13◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 45 & -9 & 27 \\ -9 & 585 & -27 \\ 27 & -27 & 81 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ13◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(0, 2, -1, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1, 3, 0, -1)$, $(0, 3, -2, 1)$, $(0, 2, 1, 0)$ и $(0, 2, 0, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ13◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}+1}{11} & \frac{-3+3\sqrt{33}+2\sqrt{3}}{66} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{11}+6}{22} \\ \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{11}-2}{22} & \frac{-15-\sqrt{3}}{33} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{11}-6}{22} \\ \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{11}-6}{22} & \frac{9+\sqrt{33}-6\sqrt{3}}{66} & \frac{-\sqrt{3}-9}{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{2}+2}{20} & \frac{6\sqrt{5}}{20} & \frac{3\sqrt{2}-6}{20} \\ \frac{-6\sqrt{5}}{20} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-2\sqrt{5}}{20} \\ \frac{3\sqrt{2}-6}{20} & \frac{2\sqrt{5}}{20} & \frac{\sqrt{2}+18}{20} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{-3\sqrt{30}}{20} & \frac{9}{20} \\ \frac{3\sqrt{30}}{20} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{30}}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{-\sqrt{30}}{20} & \frac{-17}{20} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{22} & \frac{3\sqrt{22}-\sqrt{2}}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{-3\sqrt{66}-\sqrt{6}}{22} & \frac{\sqrt{2}}{11} & \frac{-\sqrt{11}+3}{11} \\ \frac{\sqrt{66}-3\sqrt{6}}{22} & \frac{\sqrt{22}+3\sqrt{2}}{11} & \frac{9}{11} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ14◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, -1, -1, 1)$, $e_2 = (-2, -2, -1, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1, 1)$, $e_4 = (2, 1, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 4-ю координаты вектора $v = (12, 12, 7, -2)$ в этом базисе.

ЕГ14◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1, 7, 3, -2), \quad u_2 = (2, 3, -1, 4), \quad u_3 = (-1, 3, 3, -6) \\ u_4 = (-1, -4, -1, 0), \quad u_5 = (3, 4, -2, 6)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (2, -1, 5, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ14◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 80 & -16 & 32 \\ -16 & 1040 & -64 \\ 32 & -64 & 272 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ14◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5, -1, 4, 0)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(6, -1, 4, 0)$, $(6, 0, 4, 1)$, $(7, -1, 3, 1)$ и $(4, -1, 6, 1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ14◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}+4}{14} & \frac{-6\sqrt{2}+2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{7}-4}{28} \\ \frac{-6\sqrt{2}-2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{5\sqrt{2}+18}{28} & \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} \\ \frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{7}-4}{28} & \frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{13\sqrt{2}+2}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{18-\sqrt{42}}{28} & \frac{6+3\sqrt{42}}{28} \\ \frac{18+\sqrt{42}}{28} & \frac{-13}{28} & \frac{-9+2\sqrt{42}}{28} \\ \frac{6-3\sqrt{42}}{28} & \frac{-9-2\sqrt{42}}{28} & \frac{11}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{6}}{9} & \frac{-\sqrt{2}}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{-7\sqrt{6}}{18} & \frac{4\sqrt{2}}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{2\sqrt{6}}{9} & \frac{8\sqrt{2}}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-13}{18} & \frac{4-3\sqrt{3}}{18} & \frac{1+3\sqrt{3}}{9} \\ \frac{4+3\sqrt{3}}{18} & \frac{-13}{18} & \frac{-1+3\sqrt{3}}{9} \\ \frac{1-3\sqrt{3}}{9} & \frac{-1-3\sqrt{3}}{9} & \frac{-5}{9} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ15◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 2, -1, 0)$, $e_2 = (0, -1, 2, 0)$, $e_3 = (2, 2, 2, 2)$, $e_4 = (-1, -1, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-9, -11, -1, -4)$ в этом базисе.

ЕГ15◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1, -6, 4, -1), \quad u_2 = (0, 1, -1, 0), \quad u_3 = (-2, 0, 1, -1) \\ u_4 = (-3, 0, 0, -3), \quad u_5 = (2, 2, 0, 4)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-3, 5, -6, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ15◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 125 & -75 & 5 \\ -75 & 225 & -15 \\ 5 & -15 & 65 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости $A_1 B D$ **б)** площадь треугольника $A_1 C_1 D$ **в)** объём тетраэдра $A_1 C_1 B D$ и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ15◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, -3, -1, -3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, -3, 1, -4)$, $(3, -1, 0, -1)$, $(1, -3, 1, -4)$ и $(1, -2, -2, -2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ15◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3-6\sqrt{2}}{12} & \frac{6+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{3+6\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{4} & \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \\ \text{б)} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{18} & \frac{8\sqrt{2}}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{-2\sqrt{6}}{9} & \frac{4\sqrt{2}}{9} & \frac{-7}{9} \\ \frac{-4\sqrt{6}}{9} & \frac{-\sqrt{2}}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \\ \text{в)} \begin{pmatrix} \frac{-7}{12} & \frac{1-6\sqrt{2}}{12} & \frac{2+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{1+6\sqrt{2}}{12} & \frac{-7}{12} & \frac{-2+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-5}{6} \end{pmatrix} \\ \text{г)} \begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{2}+1}{9} & \frac{4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{2\sqrt{2}-2}{9} \\ \frac{-2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-5\sqrt{2}+8}{18} & \frac{-7\sqrt{2}-8}{18} \\ \frac{-4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-5\sqrt{2}+8}{18} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ16◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, -1, -2, 2)$, $e_2 = (1, 2, 1, 2)$, $e_3 = (-1, -1, -2, 2)$, $e_4 = (2, 0, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-2, -5, -6, 5)$ в этом базисе.

ЕГ16◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-1, -2, 4, -5), \quad u_2 = (1, 1, -1, 1), \quad u_3 = (0, -2, -2, 0) \\ u_4 = (6, 6, 2, -2), \quad u_5 = (3, 2, 4, -5)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (5, -1, 6, -4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ16◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 720 & -240 & -240 \\ -240 & 800 & 0 \\ -240 & 0 & 800 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ16◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-3, -4, -5, 3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-2, -2, -5, 5)$, $(-3, -3, -5, 3)$, $(-3, -3, -3, 4)$ и $(-2, -3, -4, 4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ16◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{7} & \frac{6\sqrt{7-2\sqrt{2}}}{14} & \frac{-\sqrt{14-6}}{14} \\ \frac{-6\sqrt{21-2\sqrt{6}}}{28} & \frac{\sqrt{2}}{14} & \frac{-2\sqrt{14+3}}{14} \\ \frac{2\sqrt{21-6\sqrt{6}}}{28} & \frac{4\sqrt{7+3\sqrt{2}}}{14} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-17}{26} & \frac{-3\sqrt{39}}{26} & \frac{3}{13} \\ \frac{3\sqrt{39}}{26} & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{39}}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{-\sqrt{39}}{13} & \frac{-11}{13} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-9\sqrt{2+4}}{22} & \frac{6\sqrt{2+6\sqrt{11+12}}}{44} & \frac{-6\sqrt{2+6\sqrt{11-12}}}{44} \\ \frac{6\sqrt{2-6\sqrt{11+12}}}{44} & \frac{-13\sqrt{2+18}}{44} & \frac{-9\sqrt{2-4\sqrt{11-18}}}{44} \\ \frac{-6\sqrt{2-6\sqrt{11-12}}}{44} & \frac{-9\sqrt{2+4\sqrt{11-18}}}{44} & \frac{-13\sqrt{2+18}}{44} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{39-8\sqrt{3}}{102} & \frac{-4\sqrt{3+3\sqrt{17-8}}}{34} & \frac{-9\sqrt{2-\sqrt{102-6\sqrt{6}}}}{34} \\ \frac{-12-3\sqrt{51-8\sqrt{3}}}{102} & \frac{13\sqrt{3-8}}{34} & \frac{-9\sqrt{2+\sqrt{102-6\sqrt{6}}}}{34} \\ \frac{9-\sqrt{51+6\sqrt{3}}}{51} & \frac{3\sqrt{3+\sqrt{17+6}}}{17} & \frac{-12\sqrt{2+9\sqrt{6}}}{34} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ17◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, 0, 0, -2)$, $e_2 = (-2, 2, -1, -1)$, $e_3 = (-1, 2, 1, -2)$, $e_4 = (-1, -1, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (0, -11, -6, 10)$ в этом базисе.

ЕГ17◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-1, 1, -3, -1), \quad u_2 = (1, 0, -1, -1), \quad u_3 = (-5, 2, -3, 1) \\ u_4 = (-6, 2, -6, 0), \quad u_5 = (6, -2, 2, -2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, 1, -6, 4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ17◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 45 & 27 & -9 \\ 27 & 81 & -27 \\ -9 & -27 & 585 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ17◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-1, -5, -3, 2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-1, -5, -2, 3)$, $(-2, -5, -2, 3)$, $(-2, -4, -4, 3)$ и $(-1, -3, -1, 3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ17◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-6}{11} & \frac{3-\sqrt{33}}{22} & \frac{1+3\sqrt{33}}{22} \\ \frac{3+\sqrt{33}}{22} & \frac{-10}{11} & \frac{-3+\sqrt{33}}{22} \\ \frac{1-3\sqrt{33}}{22} & \frac{-3-\sqrt{33}}{22} & \frac{-6}{11} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2}{12} \\ \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4}{6} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} \\ \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{3-2\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{-2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{8} \\ \frac{-\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{2\sqrt{3}+3}{12} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{-3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ18◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, -1, -2, -2)$, $e_2 = (-2, -1, -1, -1)$, $e_3 = (-2, 1, -2, -2)$, $e_4 = (0, 0, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-1, 7, -16, -12)$ в этом базисе.

ЕГ18◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-5, -4, 3, 2), \quad u_2 = (4, -2, -4, -4), \quad u_3 = (2, 9, -1, 4) \\ u_4 = (-2, -7, 3, -4), \quad u_5 = (-2, 6, 4, 4)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, -1, 2, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ18◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 612 & -18 & -288 \\ -18 & 1602 & -18 \\ -288 & -18 & 612 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости $A_1 B D$ **б)** площадь треугольника $A_1 C_1 D$ **в)** объём тетраэдра $A_1 C_1 B D$ и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ18◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(3, 1, 0, -5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(4, 1, 0, -5)$, $(4, 2, -1, -5)$, $(3, 1, 0, -4)$ и $(4, 1, -1, -4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ18◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{2}+8}{34} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{34}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{2}+3\sqrt{34}-8}{34} \\ \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{34}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{2}+9}{17} & \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{34}-6}{17} \\ \frac{-4\sqrt{2}-3\sqrt{34}-8}{34} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{34}-6}{17} & \frac{-13\sqrt{2}+8}{34} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{9} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{9} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}+3}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} \\ \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{17}+6}{17} & \frac{4\sqrt{3}+9}{17} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} & \frac{13\sqrt{3}+8}{34} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{3} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}-1}{3} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}-1}{3} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ19◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, -1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 0)$, $e_3 = (1, -2, 1, 2)$, $e_4 = (-2, -1, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (9, 12, 1, -9)$ в этом базисе.

ЕГ19◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, -1, -1, -2), \quad u_2 = (-3, 1, 2, 3), \quad u_3 = (-6, -2, 4, 2) \\ u_4 = (1, 1, 2, 3), \quad u_5 = (7, 1, -4, -3)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-1, 2, -5, 3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ19◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 810 & 81 & -648 \\ 81 & 405 & -567 \\ -648 & -567 & 2106 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ19◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4, 2, -1, -3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-5, 2, -2, -4)$, $(-5, 1, 1, -2)$, $(-3, 1, -2, -1)$ и $(-2, 1, -2, -2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ19◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}-1}{5} & \frac{-\sqrt{2}\sqrt{5}}{5} & \frac{2+\sqrt{2}}{5} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{10} \\ \frac{2+\sqrt{2}}{5} & \frac{-\sqrt{2}\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{2}-8}{10} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{12} & \frac{-1+6\sqrt{2}}{12} & \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{36} \\ \frac{-\sqrt{2}-12}{12} & \frac{7}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{36} \\ \frac{-2\sqrt{2}+6}{12} & \frac{2+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-5\sqrt{3}}{18} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-4}{9} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-11}{28} & \frac{9+2\sqrt{42}}{28} & \frac{-6+3\sqrt{42}}{28} \\ \frac{9-2\sqrt{42}}{28} & \frac{13}{28} & \frac{-18-\sqrt{42}}{28} \\ \frac{-6-3\sqrt{42}}{28} & \frac{-18+\sqrt{42}}{28} & \frac{-1}{14} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ20◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 2, -2, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1, 0)$, $e_3 = (-2, 2, -1, 1)$, $e_4 = (-2, 2, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-9, 10, -10, 6)$ в этом базисе.

ЕГ20◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-4, 4, 0, 3), \quad u_2 = (4, -2, 1, -4), \quad u_3 = (2, 0, 1, -2) \\ u_4 = (4, -8, -2, -4), \quad u_5 = (-2, 4, 1, 1)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, -2, 4, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ20◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 80 & 32 & -16 \\ 32 & 272 & -64 \\ -16 & -64 & 1040 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ20◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5, 4, -1, -2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(6, 6, 1, -2)$, $(6, 3, 1, -2)$, $(5, 5, 0, -2)$ и $(5, 4, 0, -1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ20◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{17\sqrt{2}}{26} & \frac{3\sqrt{39}}{26} & \frac{\sqrt{3}}{13} \\ -\frac{3\sqrt{78}}{26} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{13} & \frac{\sqrt{39}}{13} & -\frac{11\sqrt{3}}{39} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{4}{17} & \frac{4-3\sqrt{17}}{17} & \frac{2\sqrt{17+6}}{17} \\ \frac{3\sqrt{17+4}}{17} & -\frac{4}{17} & \frac{2\sqrt{17-6}}{17} \\ -\frac{2\sqrt{17+6}}{17} & \frac{-2\sqrt{17-6}}{17} & \frac{-9}{17} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} -\frac{1}{14} & \frac{-6+3\sqrt{42}}{28} & \frac{-18-\sqrt{42}}{28} \\ \frac{-6-3\sqrt{42}}{28} & \frac{-11}{28} & \frac{9-2\sqrt{42}}{28} \\ \frac{-18+\sqrt{42}}{28} & \frac{9+2\sqrt{42}}{28} & \frac{13}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}-8}{34} & \frac{-8\sqrt{3}-6\sqrt{51}-8\sqrt{6}}{68} & \frac{-6+2\sqrt{17-6}\sqrt{2}}{17} \\ \frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{34}+8}{34} & \frac{-26\sqrt{3}+8\sqrt{6}}{68} & \frac{6+2\sqrt{17+6}\sqrt{2}}{17} \\ \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{34}+6}{17} & \frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{51}+6\sqrt{6}}{34} & \frac{-8+9\sqrt{2}}{17} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ21◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, 2, -2, -2)$, $e_2 = (-1, 2, 1, 2)$, $e_3 = (2, 1, 1, 0)$, $e_4 = (1, 0, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-16, -1, 3, 10)$ в этом базисе.

ЕГ21◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, -2, -2, -1), \quad u_2 = (3, 0, 3, -2), \quad u_3 = (0, -5, -5, -2) \\ u_4 = (1, -2, -1, -2), \quad u_5 = (1, -3, -2, -2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-2, 1, -5, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ21◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 810 & -648 & 81 \\ -648 & 2106 & -567 \\ 81 & -567 & 405 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ21◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-5, 3, 2, 2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4, 5, 3, 2)$, $(-5, 3, 3, 3)$, $(-3, 3, 3, 4)$ и $(-4, 4, 4, 3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ21◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-1}{11} & \frac{-\sqrt{11}+3}{11} & \frac{1+3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{11}+3}{11} & \frac{-9}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{-3\sqrt{11}+1}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-3-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{2} & \frac{6-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-3+6\sqrt{2}}{12} & \frac{6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{3} & \frac{2\sqrt{3}-6+2\sqrt{6}}{12} & \frac{-2\sqrt{3}-2-2\sqrt{2}}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6} & \frac{-2+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{-6-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{12} & \frac{-2+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+1}{11} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{11}+6}{22} & \frac{-\sqrt{3}+3\sqrt{11}-2}{22} \\ \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{11}+6}{22} & \frac{9-\sqrt{3}}{11} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{11}-6}{22} \\ \frac{-\sqrt{3}-3\sqrt{11}-2}{22} & \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{11}-6}{22} & \frac{-5\sqrt{3}+1}{11} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ22◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, -2, 1, -2)$, $e_2 = (-2, 1, 2, 2)$, $e_3 = (2, 1, 0, -2)$, $e_4 = (-1, 1, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 2-ю координаты вектора $v = (7, -6, 7, -19)$ в этом базисе.

ЕГ22◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-2, 0, -4, -2), \quad u_2 = (3, -1, 1, 2), \quad u_3 = (1, -1, -3, 1) \\ u_4 = (3, -1, 1, 4), \quad u_5 = (-4, 2, 2, -3)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (3, -4, 1, -2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ22◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 2448 & 432 & -912 \\ 432 & 2336 & -1360 \\ -912 & -1360 & 2000 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ22◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-5, -1, -5, 1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, -1, -4, 3)$, $(-4, 0, -5, 3)$, $(-6, -1, -4, 1)$ и $(-6, 1, -5, 2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ22◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-5}{34} & \frac{9+\sqrt{51}}{17} & \frac{-12+3\sqrt{51}}{34} \\ \frac{9-\sqrt{51}}{17} & \frac{5}{17} & \frac{-9-\sqrt{51}}{17} \\ \frac{-12-3\sqrt{51}}{34} & \frac{-9+\sqrt{51}}{17} & \frac{-5}{34} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}-8}{34} & \frac{-6\sqrt{3}-2\sqrt{51}-6\sqrt{6}}{34} & \frac{-8+6\sqrt{17}-8\sqrt{2}}{34} \\ \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{34}+6}{17} & \frac{-8\sqrt{3}+9\sqrt{6}}{34} & \frac{6+2\sqrt{17}+6\sqrt{2}}{17} \\ \frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{34}+8}{34} & \frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{51}+6\sqrt{6}}{34} & \frac{-26+8\sqrt{2}}{34} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} \\ \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{3}+9}{17} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{-4\sqrt{3}-3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} & \frac{-13\sqrt{3}+8}{34} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}-8}{34} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}+6}{17} & \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{17}+8}{34} \\ \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{4\sqrt{3}-9}{17} & \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{17}+8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} & \frac{13\sqrt{3}-8}{34} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ23◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 0, 1, -1)$, $e_2 = (-1, 2, -2, 2)$, $e_3 = (1, 0, -1, 2)$, $e_4 = (1, -2, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 3-ю координаты вектора $v = (-3, 0, -4, 0)$ в этом базисе.

ЕГ23◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2, 3, -6, -5), \quad u_2 = (6, -4, -6, -2), \quad u_3 = (0, 5, -4, -5) \\ u_4 = (-1, 1, 1, 0), \quad u_5 = (2, 4, -6, -6)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, 1, -2, 4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ23◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 425 & -575 & 145 \\ -575 & 1625 & -215 \\ 145 & -215 & 505 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ23◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-2, 5, 3, 5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, 6, 4, 4)$, $(-2, 6, 2, 5)$, $(-1, 5, 4, 4)$ и $(-2, 5, 3, 6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ23◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{2}-1}{19} & \frac{-6\sqrt{3}-6\sqrt{57}-6\sqrt{6}}{76} & \frac{-6+6\sqrt{19}-6\sqrt{2}}{38} \\ \frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{38}+6}{38} & \frac{-10\sqrt{3}+9\sqrt{6}}{38} & \frac{18+2\sqrt{19}+18\sqrt{2}}{38} \\ \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{38}+6}{38} & \frac{18\sqrt{3}-2\sqrt{57}+18\sqrt{6}}{76} & \frac{-10+9\sqrt{2}}{19} \end{pmatrix}$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} \frac{-9\sqrt{3}+2}{20} & \frac{3\sqrt{10}}{20} & \frac{-3\sqrt{3}-6}{20} \\ \frac{-3\sqrt{10}}{20} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{10}}{20} \\ \frac{-3\sqrt{3}-6}{20} & \frac{\sqrt{10}}{20} & \frac{-\sqrt{3}+18}{20} \end{pmatrix}$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{3}-2}{20} & \frac{-3\sqrt{10}}{20} & \frac{3\sqrt{3}+6}{20} \\ \frac{3\sqrt{10}}{20} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{20} \\ \frac{3\sqrt{3}+6}{20} & \frac{-\sqrt{10}}{20} & \frac{\sqrt{3}-18}{20} \end{pmatrix}$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}+2}{28} & \frac{2\sqrt{6}-6\sqrt{21}-4\sqrt{3}}{84} & \frac{-3\sqrt{2}-4\sqrt{7}+6}{28} \\ \frac{-2\sqrt{2}-6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{-5\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{42} & \frac{-6\sqrt{2}+2\sqrt{7}+12}{28} \\ \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{-6\sqrt{6}-2\sqrt{21}+12\sqrt{3}}{84} & \frac{-5\sqrt{2}-18}{28} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ24◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, -1, -1, 1)$, $e_2 = (-2, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (1, 0, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 1-ю координаты вектора $v = (1, 0, -1, -3)$ в этом базисе.

ЕГ24◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1, 1, 1, 0), \quad u_2 = (-1, 2, 3, 1), \quad u_3 = (-5, -5, -3, 2) \\ u_4 = (4, 4, 3, -1), \quad u_5 = (5, 1, -1, -2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, -4, 1, -4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ24◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 225 & -15 & -75 \\ -15 & 1025 & 5 \\ -75 & 5 & 425 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости $A_1 B D$ **б)** площадь треугольника $A_1 C_1 D$ **в)** объём тетраэдра $A_1 C_1 B D$ и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ24◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5, -2, 2, 5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(4, 0, 2, 5)$, $(7, -2, 1, 4)$, $(7, -3, 3, 5)$ и $(4, -1, 3, 6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ24◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+8}{18} & \frac{-4\sqrt{3}-5}{18} & \frac{-\sqrt{3}-5}{9} \\ \frac{-4\sqrt{3}-11}{18} & \frac{-5\sqrt{3}+8}{18} & \frac{\sqrt{3}-1}{9} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{9} & \frac{\sqrt{3}+5}{9} & \frac{-4\sqrt{3}+1}{9} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-8}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{10} & \frac{2+\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{3}-1}{5} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+4}{6} & \frac{2\sqrt{6}-6-4\sqrt{3}}{36} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} \\ \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-5\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{36} & \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2}{12} \\ \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-\sqrt{6}-12+2\sqrt{3}}{36} & \frac{-5\sqrt{2}-2}{12} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-7}{10} & \frac{-\sqrt{15}}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-\sqrt{15}}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ25◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (2, 1, 1, 0)$, $e_3 = (-2, 2, 0, -1)$, $e_4 = (-1, -2, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (15, -6, 6, 5)$ в этом базисе.

ЕГ25◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, 2, -2, 2), \quad u_2 = (8, -6, -1, -2), \quad u_3 = (8, -6, 0, -2) \\ u_4 = (6, -4, -4, -1), \quad u_5 = (0, 1, -2, 1)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-2, 6, -6, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ25◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 45 & -9 & 27 \\ -9 & 585 & -27 \\ 27 & -27 & 81 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ25◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-1, -2, -1, -4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-2, -1, 0, -5)$, $(1, 0, -2, -4)$, $(1, -3, 0, -3)$ и $(1, -2, -1, -3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ25◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{\sqrt{3}+2-2\sqrt{6}}{12} & \frac{2\sqrt{3}+4+\sqrt{6}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}+2}{12} & \frac{5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}-4}{12} \\ \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}+4}{12} & \frac{-2\sqrt{3}-4-\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}-4}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{\sqrt{6}-12-2\sqrt{3}}{36} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} \\ \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2}{12} & \frac{-5\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{36} & \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} \\ \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-2\sqrt{6}-6+4\sqrt{3}}{36} & \frac{-\sqrt{2}-4}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3-6\sqrt{2}}{12} & \frac{6-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-3+6\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{4} & \frac{6+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{-8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ26◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, -1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 2, 2)$, $e_3 = (-1, 0, 1, 0)$, $e_4 = (-2, 0, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (5, 5, 7, 13)$ в этом базисе.

ЕГ26◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, -2, 1, 1), \quad u_2 = (0, -1, -3, 0), \quad u_3 = (1, -5, 1, 3) \\ u_4 = (-3, 7, 1, -5), \quad u_5 = (3, 1, 2, 2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-1, 1, -3, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ26◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 45 & 27 & -9 \\ 27 & 81 & -27 \\ -9 & -27 & 585 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ26◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5, 1, 1, 5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(4, 3, 1, 5)$, $(7, 2, 3, 6)$, $(4, 3, 1, 4)$ и $(5, 2, 2, 6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ26◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{9-\sqrt{33}}{22} & \frac{3+3\sqrt{33}}{22} \\ \frac{9+\sqrt{33}}{22} & -\frac{8}{11} & \frac{-9+\sqrt{33}}{22} \\ \frac{3-3\sqrt{33}}{22} & \frac{-9-\sqrt{33}}{22} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{\sqrt{11}+3}{11} & \frac{3\sqrt{11}-1}{11} \\ \frac{-\sqrt{11}+3}{11} & \frac{9}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{-3\sqrt{11}-1}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6}}{8} & \frac{6\sqrt{2}-6}{12} & \frac{-3-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{6\sqrt{6}+6\sqrt{3}}{24} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-3\sqrt{6}+12\sqrt{3}}{24} & \frac{-6\sqrt{2}-6}{12} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{1-\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} & \frac{1-\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ27◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 0, -1, 2)$, $e_2 = (-1, -1, 1, 2)$, $e_3 = (-1, -1, 2, -2)$, $e_4 = (0, 0, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-2, -5, 14, -5)$ в этом базисе.

ЕГ27◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-6, -4, -6, -2), \quad u_2 = (4, 3, 4, 1), \quad u_3 = (2, 2, -4, -3) \\ u_4 = (-4, -3, 2, 2), \quad u_5 = (-2, -2, 2, 2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, -4, 3, -2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ27◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 1044 & -636 & 264 \\ -636 & 884 & -216 \\ 264 & -216 & 1184 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ27◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(0, 2, -4, 2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(0, 1, -5, 2)$, $(0, 3, -2, 1)$, $(1, 2, -4, 3)$ и $(1, 2, -5, 3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ27◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ -\sqrt{3}+1 & \frac{1}{3} & -\sqrt{3}-1 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \text{б)} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3} & \frac{-4-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ -4\sqrt{6}+3\sqrt{2} & \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ \text{в)} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{1-\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} & \frac{1-\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \\ \text{г)} \begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{3}-8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}+6-\sqrt{17}}{17} & \frac{-4\sqrt{3}+8+3\sqrt{17}}{34} \\ \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{3}-9}{17} & \frac{3\sqrt{3}-6+\sqrt{17}}{17} \\ \frac{-4\sqrt{3}-3\sqrt{17}+8}{34} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} & \frac{-13\sqrt{3}-8}{34} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ28◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, -2, 1, -1)$, $e_2 = (0, 2, 1, -1)$, $e_3 = (0, 2, -1, 2)$, $e_4 = (-2, -1, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-6, -8, -11, 16)$ в этом базисе.

ЕГ28◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, 3, 4, -5), \quad u_2 = (8, 0, -2, 0), \quad u_3 = (4, 0, 0, -2) \\ u_4 = (4, 2, 2, -4), \quad u_5 = (6, 0, -1, -1)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, -3, 3, -4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ28◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 464 & 256 & -544 \\ 256 & 320 & -320 \\ -544 & -320 & 1040 \end{pmatrix}.$$

Найдите а) расстояние от точки C до плоскости A_1BD б) площадь треугольника A_1C_1D в) объём тетраэдра A_1C_1BD и г) радиус д) центр вписанного в него шара.

ЕГ28◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(2, -4, 5, 2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1, -5, 5, 1)$, $(1, -5, 5, 4)$, $(1, -4, 6, 4)$ и $(2, -3, 7, 3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а) четырёхмерный объём Δ_4 б) трёхмерный объём Δ_3
- в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ28◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}+4}{14} & \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{-2\sqrt{2}+6\sqrt{7}-4}{28} \\ \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{-5\sqrt{2}+18}{28} & \frac{-3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} \\ \frac{-2\sqrt{2}-6\sqrt{7}-4}{28} & \frac{-3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{-13\sqrt{2}+2}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}-4}{6} & \frac{-2\sqrt{3}+4-\sqrt{6}}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+4+\sqrt{6}}{12} \\ \frac{-2\sqrt{3}+4+\sqrt{6}}{12} & \frac{-5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2}{12} \\ \frac{-2\sqrt{3}+4-\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{6}-2}{12} & \frac{-5\sqrt{3}-2}{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-15-8\sqrt{3}}{54} & \frac{4\sqrt{3}-11}{18} & \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{18} \\ \frac{12-5\sqrt{3}}{54} & \frac{-5\sqrt{3}-8}{18} & \frac{3\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{18} \\ \frac{-3+5\sqrt{3}}{27} & \frac{-\sqrt{3}-1}{9} & \frac{\sqrt{6}+12\sqrt{2}}{18} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}-4}{14} & \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{7}+4}{28} \\ \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{5\sqrt{2}-18}{28} & \frac{-3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} \\ \frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{-3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{13\sqrt{2}-2}{28} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ29◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, 0, 0, -2)$, $e_2 = (0, -1, 1, -1)$, $e_3 = (2, -2, 2, -1)$, $e_4 = (-2, 2, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (0, -8, 5, -5)$ в этом базисе.

ЕГ29◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1, 2, 2, 2), \quad u_2 = (-5, -4, -2, -6), \quad u_3 = (-4, -5, -3, -4) \\ u_4 = (-3, -3, -1, -2), \quad u_5 = (2, -2, -3, 2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-4, 6, -2, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ29◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 272 & 104 & -88 \\ 104 & 296 & -40 \\ -88 & -40 & 200 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ29◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-3, -1, 4, 0)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-2, 0, 5, 0)$, $(-1, 0, 4, 0)$, $(-3, 0, 3, 2)$ и $(-3, -1, 3, 1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ29◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}-1}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{2-\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{3}-8}{10} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-15-2\sqrt{3}}{36} & \frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2}{12} & \frac{6\sqrt{2}-6-4\sqrt{6}}{24} \\ \frac{-3+6\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{36} & \frac{-5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-6\sqrt{2}-6+4\sqrt{6}}{24} \\ \frac{-6-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{36} & \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}-4}{12} & \frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{6}}{12} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}-2}{12} & \frac{\sqrt{2}+2-4\sqrt{3}}{12} & \frac{2\sqrt{2}+4+2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}{12} & \frac{5\sqrt{2}-2}{12} & \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-4}{12} \\ \frac{-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+4}{12} & \frac{-2\sqrt{2}-4-2\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{2}-4}{6} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{6\sqrt{2}-1}{12} & \frac{-3\sqrt{2}-2}{12} \\ \frac{-6\sqrt{2}-1}{12} & \frac{7}{12} & \frac{-3\sqrt{2}+2}{12} \\ \frac{3\sqrt{2}-2}{12} & \frac{3\sqrt{2}+2}{12} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ30◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, -1, 0, 2)$, $e_2 = (-2, 0, -2, -1)$, $e_3 = (2, 1, 2, 1)$, $e_4 = (2, 2, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 3-ю координаты вектора $v = (20, 12, 18, 6)$ в этом базисе.

ЕГ30◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2, -2, 4, -6), \quad u_2 = (-1, -3, 0, -1), \quad u_3 = (0, 2, -1, 2) \\ u_4 = (1, 6, -1, 4), \quad u_5 = (-2, -8, 0, -4)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (1, -3, 3, -2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ30◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 2448 & 432 & -912 \\ 432 & 2336 & -1360 \\ -912 & -1360 & 2000 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ30◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(2, 1, -1, 0)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, 0, 0, 2)$, $(3, 0, -1, 2)$, $(1, 0, -2, 2)$ и $(3, 1, 0, 1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ30◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-27-4\sqrt{3}}{66} & \frac{6\sqrt{3}-3\sqrt{22}-12}{44} & \frac{18\sqrt{2}+6\sqrt{33}-12\sqrt{6}}{88} \\ \frac{6+\sqrt{66}-4\sqrt{3}}{44} & \frac{-13\sqrt{3}-18}{44} & \frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{33}-18\sqrt{6}}{88} \\ \frac{-6+\sqrt{66}+4\sqrt{3}}{44} & \frac{-9\sqrt{3}-2\sqrt{22}+18}{44} & \frac{39\sqrt{2}+18\sqrt{6}}{88} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}-4}{14} & \frac{2\sqrt{2}+4-6\sqrt{7}}{28} & \frac{6\sqrt{2}+12+2\sqrt{7}}{28} \\ \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{13\sqrt{2}-2}{28} & \frac{-3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} \\ \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{-3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{5\sqrt{2}-18}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{21}{34} & \frac{-4+3\sqrt{51}}{34} & \frac{-3-\sqrt{51}}{17} \\ \frac{-4-3\sqrt{51}}{34} & \frac{21}{34} & \frac{3-\sqrt{51}}{17} \\ \frac{-3+\sqrt{51}}{17} & \frac{3+\sqrt{51}}{17} & \frac{13}{17} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{2}}{17} & \frac{-3\sqrt{17}+4}{17} & \frac{2\sqrt{51}+6\sqrt{3}}{51} \\ \frac{3\sqrt{34}+4\sqrt{2}}{17} & \frac{4}{17} & \frac{-2\sqrt{51}+6\sqrt{3}}{51} \\ \frac{2\sqrt{34}-6\sqrt{2}}{17} & \frac{-2\sqrt{17}-6}{17} & \frac{-3\sqrt{3}}{17} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ31◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, 2, 1, -2)$, $e_2 = (0, 2, -2, 0)$, $e_3 = (-1, 0, -2, -2)$, $e_4 = (0, 1, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (5, 2, 2, 16)$ в этом базисе.

ЕГ31◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (4, 0, 2, -4), \quad u_2 = (2, -6, 0, 6), \quad u_3 = (2, -2, 3, -4) \\ u_4 = (-2, 6, -3, 0), \quad u_5 = (-2, 2, -2, 2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-2, 3, -6, 3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ31◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 45 & 27 & -9 \\ 27 & 81 & -27 \\ -9 & -27 & 585 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ31◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, 5, 2, -4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, 7, 3, -4)$, $(0, 6, 4, -4)$, $(1, 7, 3, -4)$ и $(2, 4, 1, -3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ31◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}-2}{12} & \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{2}+2+4\sqrt{3}}{12} \\ \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{\sqrt{2}-4}{6} & \frac{-2\sqrt{2}-4+2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2}{12} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{5\sqrt{2}-2}{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 1 & 0 & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ32◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, 0, 0, -2)$, $e_2 = (-2, 1, -1, -1)$, $e_3 = (-1, 0, 1, -1)$, $e_4 = (-1, 0, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 2-ю координаты вектора $v = (0, -1, 3, 3)$ в этом базисе.

ЕГ32◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2, 0, -1, -4), \quad u_2 = (2, 1, -1, -6), \quad u_3 = (6, -3, 1, -6) \\ u_4 = (-2, 1, 0, 2), \quad u_5 = (0, -2, 0, 4)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (5, -2, 4, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ32◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 225 & -75 & -15 \\ -75 & 425 & 5 \\ -15 & 5 & 1025 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ32◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, 1, -4, 3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(3, 2, -3, 4)$, $(3, 2, -3, 5)$, $(2, 1, -5, 5)$ и $(2, 2, -3, 4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ32◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{\sqrt{3}+3}{9} \\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-3+\sqrt{3}}{9} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-4-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{3} & -1 & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} \\ \frac{-4+\sqrt{3}}{6} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-\sqrt{2}+8}{18} \\ \frac{2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-4\sqrt{2}-1}{9} & \frac{4\sqrt{2}-2}{9} \\ \frac{-7\sqrt{2}+8}{18} & \frac{-2\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ33◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, -2, -1, 0)$, $e_2 = (0, -1, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 2, -1)$, $e_4 = (2, 0, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-5, -16, -9, -2)$ в этом базисе.

ЕГ33◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1, -4, -2, 4), \quad u_2 = (1, 0, 4, -4), \quad u_3 = (2, -2, 5, -4) \\ u_4 = (1, 0, 2, -2), \quad u_5 = (-3, 2, -1, 0)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-2, 1, -2, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ33◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 425 & 145 & -575 \\ 145 & 505 & -215 \\ -575 & -215 & 1625 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ33◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(4, -3, -4, 4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(3, -1, -4, 4)$, $(6, -2, -2, 3)$, $(3, -3, -3, 5)$ и $(3, -3, -4, 5)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ33◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{19} & \frac{-3\sqrt{19}-3}{19} & \frac{-\sqrt{57}+\sqrt{3}}{19} \\ \frac{3\sqrt{38}-3\sqrt{2}}{19} & \frac{9}{19} & \frac{-\sqrt{57}-9\sqrt{3}}{19} \\ \frac{-3\sqrt{38}-3\sqrt{2}}{19} & \frac{-\sqrt{19}+9}{19} & \frac{57}{19} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-8}{19} & \frac{9+3\sqrt{57}}{38} & \frac{-9+3\sqrt{57}}{38} \\ \frac{9-3\sqrt{57}}{38} & \frac{4}{19} & \frac{-27-\sqrt{57}}{38} \\ \frac{-9-3\sqrt{57}}{38} & \frac{-27+\sqrt{57}}{38} & \frac{4}{19} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{2}-2}{28} & \frac{2\sqrt{2}-4-6\sqrt{7}}{28} & \frac{-3\sqrt{2}+6-4\sqrt{7}}{28} \\ \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{7}-4}{28} & \frac{-5\sqrt{2}-4}{14} & \frac{-6\sqrt{2}+2\sqrt{7}+12}{28} \\ \frac{-3\sqrt{2}+4\sqrt{7}+6}{28} & \frac{-6\sqrt{2}-2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{-5\sqrt{2}-18}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{3}-1}{19} & \frac{9\sqrt{2}+3\sqrt{114}+6\sqrt{6}}{76} & \frac{-3\sqrt{6}+3\sqrt{38}-6\sqrt{2}}{38} \\ \frac{-3\sqrt{3}+3\sqrt{19}-6}{38} & \frac{-15\sqrt{2}+9\sqrt{6}}{38} & \frac{-9\sqrt{6}-\sqrt{38}-18\sqrt{2}}{38} \\ \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{19}+6}{38} & \frac{-27\sqrt{2}+\sqrt{114}-18\sqrt{6}}{76} & \frac{-5\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{19} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ34◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, 0, 0, -1)$, $e_2 = (1, 1, -2, -1)$, $e_3 = (0, 0, 2, -2)$, $e_4 = (-2, 0, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-1, 3, -12, 9)$ в этом базисе.

ЕГ34◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1, 6, -2, -3), \quad u_2 = (0, 4, 0, 0), \quad u_3 = (0, 7, -1, -2) \\ u_4 = (1, -4, 0, 1), \quad u_5 = (-2, -6, 2, 2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-1, 2, -3, 3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ34◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 125 & -75 & 5 \\ -75 & 225 & -15 \\ 5 & -15 & 65 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ34◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-3, 5, -5, 3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-1, 5, -5, 4)$, $(-3, 4, -5, 5)$, $(-4, 5, -4, 2)$ и $(-4, 4, -5, 4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ34◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{2}-1}{9} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{2\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{7\sqrt{2}-8}{18} \\ \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}-1}{5} & \frac{\sqrt{5}\sqrt{6}}{10} & \frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-3\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{2}\sqrt{5}}{10} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{5} & \frac{\sqrt{5}\sqrt{6}}{20} & \frac{-\sqrt{6}+8\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}-2}{28} & \frac{3\sqrt{3}+6-2\sqrt{14}}{28} & \frac{2\sqrt{3}+4+3\sqrt{14}}{28} \\ \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{5\sqrt{3}-18}{28} & \frac{-6\sqrt{3}+\sqrt{14}-12}{28} \\ \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{-6\sqrt{3}-\sqrt{14}-12}{28} & \frac{5\sqrt{3}-4}{14} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}+2}{28} & \frac{-3\sqrt{2}+4\sqrt{7}+6}{28} & \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{7}-4}{28} \\ \frac{-3\sqrt{2}-4\sqrt{7}+6}{28} & \frac{5\sqrt{2}+18}{28} & \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{7}-12}{28} \\ \frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{7}-4}{28} & \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{7}-12}{28} & \frac{5\sqrt{2}+4}{14} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ35◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, 1, -1, 2)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-1, -2, 1, -2)$, $e_4 = (-2, 0, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-3, -9, 0, 3)$ в этом базисе.

ЕГ35◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, 7, 2, 3), \quad u_2 = (-8, 3, -6, -1), \quad u_3 = (-2, 8, 4, 4) \\ u_4 = (-3, 5, 4, 3), \quad u_5 = (-6, 4, -4, 0)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (2, -2, 1, -4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ35◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 612 & -18 & -288 \\ -18 & 1602 & -18 \\ -288 & -18 & 612 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ35◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5, 3, 1, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(5, 4, 1, 1)$, $(4, 4, 1, 1)$, $(6, 5, 2, 0)$ и $(6, 5, 1, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ35◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{3}-4}{22} & \frac{18\sqrt{2}+6\sqrt{33}+12\sqrt{6}}{88} & \frac{-6\sqrt{6}+6\sqrt{11}-12\sqrt{2}}{44} \\ \frac{-6\sqrt{3}+3\sqrt{22}-12}{44} & \frac{-39\sqrt{2}+18\sqrt{6}}{88} & \frac{-9\sqrt{6}-4\sqrt{11}-18\sqrt{2}}{44} \\ \frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{22}+12}{44} & \frac{-27\sqrt{2}+4\sqrt{33}-18\sqrt{6}}{88} & \frac{-13\sqrt{6}+18\sqrt{2}}{44} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}-8}{34} & \frac{-4\sqrt{3}-8-3\sqrt{17}}{34} & \frac{3\sqrt{3}+6-\sqrt{17}}{17} \\ \frac{-4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{13\sqrt{3}-8}{34} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} \\ \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{3\sqrt{3}+6-\sqrt{17}}{17} & \frac{4\sqrt{3}-9}{17} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}+8}{34} & \frac{-4\sqrt{2}+3\sqrt{34}+8}{34} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{34}-6}{17} \\ \frac{-4\sqrt{2}-3\sqrt{34}+8}{34} & \frac{13\sqrt{2}+8}{34} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{34}-6}{17} \\ \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{34}-6}{17} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{34}-6}{17} & \frac{4\sqrt{2}+9}{17} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{13}{22} & \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{22}}{44} & \frac{6-3\sqrt{66}}{44} \\ \frac{-6+3\sqrt{66}}{44} & \frac{-31\sqrt{3}}{132} & \frac{-9-2\sqrt{66}}{44} \\ \frac{-6-3\sqrt{66}}{44} & \frac{-9\sqrt{3}+6\sqrt{22}}{132} & \frac{-31}{44} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ36◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, 2, 0, 0)$, $e_2 = (1, 2, 1, -1)$, $e_3 = (2, -2, 1, -2)$, $e_4 = (2, -2, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (8, 10, 3, 1)$ в этом базисе.

ЕГ36◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (7, 1, 3, -2), \quad u_2 = (-4, 0, -2, 1), \quad u_3 = (1, -2, 0, 1) \\ u_4 = (3, -1, 1, 0), \quad u_5 = (-7, 0, -4, 2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-3, 3, -1, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ36◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 425 & -75 & 5 \\ -75 & 225 & -15 \\ 5 & -15 & 1025 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ36◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(4, 4, 0, -5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(4, 3, 1, -4)$, $(4, 4, 2, -4)$, $(3, 4, 1, -4)$ и $(6, 5, 0, -4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ36◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}-4-\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}+2-2\sqrt{6}}{12} \\ \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}-4}{12} & \frac{\sqrt{3}-4}{6} & \frac{2\sqrt{3}+4+\sqrt{6}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}+2}{12} & \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}+4}{12} & \frac{5\sqrt{3}-2}{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}+1}{11} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{22}+6}{22} & \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{22}-2}{22} \\ \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{22}+6}{22} & \frac{\sqrt{2}+9}{11} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{22}-6}{22} \\ \frac{\sqrt{2}-3\sqrt{22}-2}{22} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{22}-6}{22} & \frac{5\sqrt{2}+1}{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{11}}{66} & \frac{1-3\sqrt{33}}{22} \\ \frac{-3+\sqrt{33}}{22} & \frac{-10\sqrt{3}}{33} & \frac{-3-\sqrt{33}}{22} \\ \frac{-1-3\sqrt{33}}{22} & \frac{-3\sqrt{3}+3\sqrt{11}}{66} & \frac{-6}{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{6}-2}{6} & \frac{-2\sqrt{6}-1}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}-2}{6} & \frac{2}{3} & \frac{-\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}-1}{6} & \frac{\sqrt{6}+2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ37◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, -2, -1, 0)$, $e_2 = (-1, -1, -2, -2)$, $e_3 = (0, 2, 0, 2)$, $e_4 = (2, 1, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 4-ю координаты вектора $v = (1, 13, 0, 10)$ в этом базисе.

ЕГ37◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (4, 2, 0, -8), \quad u_2 = (0, -7, 2, -2), \quad u_3 = (-6, 1, 4, 8) \\ u_4 = (-4, -4, 4, 4), \quad u_5 = (0, 8, 0, 0)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (1, -3, 3, -2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ37◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 585 & -45 & -45 \\ -45 & 1125 & -675 \\ -45 & -675 & 1125 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ37◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-3, 5, -4, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4, 6, -4, -2)$, $(-1, 6, -4, -2)$, $(-2, 4, -3, -1)$ и $(-4, 5, -4, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ37◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}+8}{18} & \frac{4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{\sqrt{2}-8}{18} \\ -\frac{2\sqrt{2}-2}{9} & \frac{4\sqrt{2}+1}{9} & -\frac{4\sqrt{2}+2}{18} \\ \frac{7\sqrt{2}-8}{18} & \frac{2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{5\sqrt{2}+8}{18} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{9} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{-\sqrt{3}+1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ38◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, 1, -2, -1)$, $e_2 = (2, 1, -2, 0)$, $e_3 = (1, 2, 2, -2)$, $e_4 = (1, -1, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (1, 1, -8, 0)$ в этом базисе.

ЕГ38◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-1, -6, -1, 2), \quad u_2 = (-6, 0, 2, 4), \quad u_3 = (0, -1, 1, -1) \\ u_4 = (-1, -3, 0, 1), \quad u_5 = (-6, -4, 2, 4)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, 5, -5, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ38◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 125 & -75 & 5 \\ -75 & 225 & -15 \\ 5 & -15 & 65 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ38◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4, 5, 5, 5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, 5, 5, 6)$, $(-4, 6, 5, 6)$, $(-4, 5, 6, 5)$ и $(-4, 5, 4, 6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ38◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{3\sqrt{10}}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{3\sqrt{30}}{20} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{30}}{20} \\ -\frac{3}{20} & \frac{\sqrt{10}}{20} & -\frac{19}{20} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3\sqrt{10}}{10} & 0 & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} -\frac{10}{19} & \frac{3-3\sqrt{57}}{38} & \frac{3+3\sqrt{57}}{38} \\ \frac{3+3\sqrt{57}}{38} & -\frac{14}{19} & -\frac{9+\sqrt{57}}{38} \\ \frac{3-3\sqrt{57}}{38} & -\frac{9-\sqrt{57}}{38} & -\frac{14}{19} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} -\frac{26\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{56} & \frac{4+6\sqrt{14}+4\sqrt{2}}{28} & -\frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} \\ \frac{4\sqrt{3}-6\sqrt{42}+4\sqrt{6}}{56} & -\frac{10+4\sqrt{2}}{14} & -\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{7}-12}{28} \\ -\frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{42}-6\sqrt{6}}{56} & -\frac{12+2\sqrt{14}-12\sqrt{2}}{28} & -\frac{5\sqrt{2}+18}{28} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ39◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, 1, -2, 2)$, $e_2 = (-2, 1, -1, -2)$, $e_3 = (-1, 1, 0, -2)$, $e_4 = (-1, 0, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 3-ю координаты вектора $v = (7, 2, 5, -1)$ в этом базисе.

ЕГ39◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-6, -3, 1, -2), \quad u_2 = (2, 2, 5, -4), \quad u_3 = (-4, -2, 2, -4) \\ u_4 = (-5, -2, 3, -3), \quad u_5 = (8, 5, 2, 2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (5, -4, 1, -1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ39◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 810 & 81 & -648 \\ 81 & 405 & -567 \\ -648 & -567 & 2106 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ39◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-2, 1, -4, 5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-1, 0, -3, 5)$, $(-3, 3, -5, 4)$, $(-2, 2, -3, 4)$ и $(-1, 0, -4, 6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ39◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{-8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \\ \text{б)} \begin{pmatrix} \frac{-5}{6} & \frac{2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{2+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{2+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-7}{12} & \frac{-1+6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1-6\sqrt{2}}{12} & \frac{-7}{12} \end{pmatrix} \\ \text{в)} \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{12} & \frac{4+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}}{12} & \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} \\ \frac{4\sqrt{3}-6\sqrt{2}+4\sqrt{6}}{24} & \frac{-10+2\sqrt{2}}{12} & \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2}{12} \\ \frac{-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24} & \frac{-2+4\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{12} & \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} \end{pmatrix} \\ \text{г)} \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}-8}{18} & \frac{-4\sqrt{3}+5}{18} & \frac{-\sqrt{3}+5}{9} \\ \frac{-4\sqrt{3}+11}{18} & \frac{-5\sqrt{3}-8}{18} & \frac{1+\sqrt{3}}{9} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{9} & \frac{\sqrt{3}-5}{9} & \frac{-4\sqrt{3}-1}{9} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ40◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1, 0)$, $e_3 = (2, 0, 2, 2)$, $e_4 = (0, -2, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 3-ю координаты вектора $v = (-3, 4, 7, -6)$ в этом базисе.

ЕГ40◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, -3, -1, -1), \quad u_2 = (0, 1, -3, 1), \quad u_3 = (2, 1, 3, 1) \\ u_4 = (0, 2, 4, 0), \quad u_5 = (2, 0, 1, 1)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-4, 4, -1, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ40◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 612 & -18 & -288 \\ -18 & 1602 & -18 \\ -288 & -18 & 612 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости $A_1 B D$ **б)** площадь треугольника $A_1 C_1 D$ **в)** объём тетраэдра $A_1 C_1 B D$ и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ40◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(3, 1, 0, 3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(5, 1, 2, 2)$, $(4, 2, 0, 3)$, $(2, 2, 1, 5)$ и $(4, 3, 2, 4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ40◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{-15}{28} & \frac{3-2\sqrt{42}}{28} & \frac{2+3\sqrt{42}}{28} \\ \frac{3+2\sqrt{42}}{28} & \frac{-23}{28} & \frac{-6+\sqrt{42}}{28} \\ \frac{2-3\sqrt{42}}{28} & \frac{-6-\sqrt{42}}{28} & \frac{-9}{14} \end{pmatrix} \\ \text{б)} \begin{pmatrix} \frac{-10\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{24} & \frac{4\sqrt{6}+2+2\sqrt{2}}{12} & \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-4}{12} \\ \frac{-12\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{24} & \frac{-10+2\sqrt{2}}{12} & \frac{-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-4}{12} \\ \frac{-6\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{24} & \frac{2\sqrt{6}-4-4\sqrt{2}}{12} & \frac{4-\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} \\ \text{в)} \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{\sqrt{3}-2-2\sqrt{6}}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+4-\sqrt{6}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2}{12} & \frac{-5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}+4}{12} \\ \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}+4}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+4-\sqrt{6}}{12} & \frac{-\sqrt{3}-4}{6} \end{pmatrix} \\ \text{г)} \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}+2}{12} & \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2}{12} & \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}-4}{12} \\ \frac{\sqrt{3}-2-2\sqrt{6}}{12} & \frac{5\sqrt{3}+2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+4-\sqrt{6}}{12} \\ \frac{2\sqrt{3}-4+\sqrt{6}}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}+4}{12} & \frac{\sqrt{3}+4}{6} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ41◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 1, 2, 0)$, $e_2 = (2, 2, 0, -2)$, $e_3 = (-1, 0, 2, 2)$, $e_4 = (2, 1, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 4-ю координаты вектора $v = (-13, -8, 12, 7)$ в этом базисе.

ЕГ41◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, -1, 3, -2), \quad u_2 = (-6, 6, -10, 10), \quad u_3 = (-1, 2, -2, 1) \\ u_4 = (2, 0, 0, -2), \quad u_5 = (-1, -2, -2, 5)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (3, -3, 4, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ41◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 425 & 145 & -575 \\ 145 & 505 & -215 \\ -575 & -215 & 1625 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ41◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-1, 2, -1, -4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-1, 3, 1, -4)$, $(-1, 3, 1, -3)$, $(-2, 2, 0, -4)$ и $(-1, 2, 0, -3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ41◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{-18\sqrt{3}+8\sqrt{6}}{52} & \frac{3\sqrt{13}}{13} & \frac{-3\sqrt{2}-6}{13} \\ \frac{-3\sqrt{39}}{26} & -1 & \frac{-\sqrt{26}}{13} \\ \frac{-6\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{26} & \frac{2\sqrt{13}}{13} & \frac{-2\sqrt{2}+9}{13} \end{pmatrix}$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}-4}{14} & \frac{2\sqrt{3}-4-3\sqrt{14}}{28} & \frac{-6\sqrt{3}+12-\sqrt{14}}{28} \\ \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{14}-4}{28} & \frac{-13\sqrt{3}-2}{28} & \frac{-3\sqrt{3}+2\sqrt{14}+6}{28} \\ \frac{-6\sqrt{3}+\sqrt{14}+12}{28} & \frac{-3\sqrt{3}-2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{-5\sqrt{3}-18}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{3}+4}{22} & \frac{-6\sqrt{3}+3\sqrt{22}+12}{44} & \frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{22}-12}{44} \\ \frac{-6\sqrt{3}-3\sqrt{22}+12}{44} & \frac{13\sqrt{3}+18}{44} & \frac{9\sqrt{3}-2\sqrt{22}-18}{44} \\ \frac{6\sqrt{3}-3\sqrt{22}-12}{44} & \frac{9\sqrt{3}+2\sqrt{22}-18}{44} & \frac{13\sqrt{3}+18}{44} \end{pmatrix}$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} \frac{-9\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{66} & \frac{-6\sqrt{2}+6\sqrt{11}+12}{44} & \frac{12\sqrt{3}+6\sqrt{66}-12\sqrt{6}}{88} \\ \frac{-2\sqrt{6}-2\sqrt{33}+4\sqrt{3}}{44} & \frac{-13\sqrt{2}-18}{44} & \frac{-18\sqrt{3}+4\sqrt{66}+18\sqrt{6}}{88} \\ \frac{-2\sqrt{6}+2\sqrt{33}+4\sqrt{3}}{44} & \frac{9\sqrt{2}+4\sqrt{11}-18}{44} & \frac{26\sqrt{3}+18\sqrt{6}}{88} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ42◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, 1, 2, -2)$, $e_2 = (-1, 1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 0, 1, 0)$, $e_4 = (-1, 2, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-6, -1, -5, 5)$ в этом базисе.

ЕГ42◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-1, 1, 3, -6), \quad u_2 = (2, 0, 2, -2), \quad u_3 = (-2, 0, 2, -6) \\ u_4 = (0, -1, -2, 3), \quad u_5 = (-1, 0, -2, 3)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-5, 1, -1, 5)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ42◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 272 & 104 & -88 \\ 104 & 296 & -40 \\ -88 & -40 & 200 \end{pmatrix}.$$

Найдите а) расстояние от точки C до плоскости $A_1 B D$ б) площадь треугольника $A_1 C_1 D$ в) объём тетраэдра $A_1 C_1 B D$ и г) радиус д) центр вписанного в него шара.

ЕГ42◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-2, -5, -5, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, -5, -3, 0)$, $(-2, -6, -6, -2)$, $(0, -4, -6, 1)$ и $(0, -5, -6, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а) четырёхмерный объём Δ_4 б) трёхмерный объём Δ_3
- в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ42◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}-2}{4} \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{9} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} & \frac{2\sqrt{3}-6-2\sqrt{6}}{12} \\ \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{18} & \frac{-\sqrt{2}-1}{3} & \frac{2\sqrt{3}+6-2\sqrt{6}}{12} \\ \frac{-\sqrt{6}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{18} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{-2+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{5}{6} & \frac{2-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-1+6\sqrt{2}}{12} & \frac{2+3\sqrt{2}}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ43◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, 1, 0, -2)$, $e_2 = (-1, 2, -2, 2)$, $e_3 = (2, 2, 1, -1)$, $e_4 = (-2, -1, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 4-ю координаты вектора $v = (7, 2, 12, -6)$ в этом базисе.

ЕГ43◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-4, -4, 4, 0), \quad u_2 = (-8, 0, 0, 0), \quad u_3 = (-2, -4, 0, -2) \\ u_4 = (-5, -2, 0, -1), \quad u_5 = (-3, -2, 4, 1)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (2, -4, 4, -3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ43◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 810 & -648 & 81 \\ -648 & 2106 & -567 \\ 81 & -567 & 405 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ43◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-5, 2, -3, -5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4, 3, -3, -6)$, $(-5, 3, -2, -6)$, $(-5, 1, -4, -3)$ и $(-5, 2, -4, -4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ43◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-2+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{7}{12} & \frac{-1-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1+6\sqrt{2}}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-4}{9} & \frac{-7}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{14} & \frac{18+\sqrt{42}}{28} & \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{14}}{28} \\ \frac{18\sqrt{2}-2\sqrt{21}}{28} & \frac{13}{28} & \frac{9\sqrt{3}+6\sqrt{14}}{84} \\ \frac{-6\sqrt{2}-6\sqrt{21}}{28} & \frac{-9+2\sqrt{42}}{28} & \frac{11\sqrt{3}}{84} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{7\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{2\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-4\sqrt{2}-1}{9} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ44◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, 1, -1, 1)$, $e_2 = (2, 2, 1, 2)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (1, -2, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 3-ю координаты вектора $v = (-3, -8, -1, -5)$ в этом базисе.

ЕГ44◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (4, -1, 2, 2), \quad u_2 = (2, 1, 2, 1), \quad u_3 = (0, -3, -4, -3) \\ u_4 = (4, 4, 6, 3), \quad u_5 = (2, -1, 0, 0)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (0, -6, 4, -3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ44◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 272 & 104 & -88 \\ 104 & 296 & -40 \\ -88 & -40 & 200 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ44◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-5, -3, 2, 3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, -4, 2, 4)$, $(-4, -3, 1, 3)$, $(-6, -2, 3, 3)$ и $(-6, -3, 4, 4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ44◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{26} & \frac{3\sqrt{39}}{26} & \frac{3\sqrt{3}}{13} \\ \frac{-3\sqrt{78}}{26} & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{13}}{13} \\ \frac{-9\sqrt{2}}{13} & \frac{\sqrt{39}}{13} & \frac{-7\sqrt{3}}{39} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{2}-8}{34} & \frac{4\sqrt{2}-8-3\sqrt{34}}{34} & \frac{-3\sqrt{2}+6-\sqrt{34}}{17} \\ \frac{3\sqrt{34}+4\sqrt{2}-8}{34} & \frac{-13\sqrt{2}-8}{34} & \frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}+6}{17} \\ \frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}+6}{17} & \frac{-3\sqrt{2}+6-\sqrt{34}}{17} & \frac{-4\sqrt{2}-9}{17} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{-4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{-4\sqrt{3}-3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{-13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}+6}{17} \\ \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{3}+9}{17} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}-4}{14} & \frac{6\sqrt{2}-6\sqrt{21}-4\sqrt{6}}{56} & \frac{6\sqrt{6}+2\sqrt{7}-12\sqrt{2}}{28} \\ \frac{-2\sqrt{3}-3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{39\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{56} & \frac{-3\sqrt{6}+4\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{28} \\ \frac{-6\sqrt{3}+\sqrt{14}+12}{28} & \frac{-9\sqrt{2}-4\sqrt{21}+6\sqrt{6}}{56} & \frac{5\sqrt{6}+18\sqrt{2}}{28} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ45◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 2, 1, 1)$, $e_2 = (1, -2, -1, 1)$, $e_3 = (-1, 2, -1, 1)$, $e_4 = (2, 2, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (10, -14, -8, 1)$ в этом базисе.

ЕГ45◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-1, 4, -4, 3), \quad u_2 = (0, -5, 6, -3), \quad u_3 = (-2, -1, 4, 3) \\ u_4 = (2, 1, -2, 1), \quad u_5 = (0, -4, 4, -4)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-1, 2, -4, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ45◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 1458 & -486 & -162 \\ -486 & 450 & -90 \\ -162 & -90 & 666 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ45◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4, -2, 3, 0)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-5, 0, 3, 1)$, $(-5, -1, 3, 0)$, $(-5, -3, 4, 2)$ и $(-4, -2, 5, 1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ45◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{2}+4-2\sqrt{3}}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2}{12} \\ \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-\sqrt{2}-4}{6} & \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} \\ \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2}{12} & \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-5\sqrt{2}-2}{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}-4}{12} & \frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{6}-2}{12} \\ \frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{6}-4}{12} & \frac{-\sqrt{3}+4}{6} & \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}+4}{12} \\ \frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2}{12} & \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}+4}{12} & \frac{-5\sqrt{3}+2}{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ46◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 2, 1, -2)$, $e_2 = (0, -1, 1, 1)$, $e_3 = (2, 0, 0, 1)$, $e_4 = (2, 2, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 3-ю координаты вектора $v = (7, 4, -7, -1)$ в этом базисе.

ЕГ46◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (6, 2, -2, 8), \quad u_2 = (5, 3, -4, 4), \quad u_3 = (5, 3, -5, 2) \\ u_4 = (0, -4, 2, -2), \quad u_5 = (4, 0, -2, 2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (4, -3, 4, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ46◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 320 & 160 & 160 \\ 160 & 800 & 0 \\ 160 & 0 & 800 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ46◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, 1, -2, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, 1, -2, -1)$, $(3, 2, 0, -1)$, $(2, 1, -1, -1)$ и $(1, 0, -1, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ46◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} \\ \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{3}+9}{17} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{-4\sqrt{3}-3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} & \frac{-13\sqrt{3}+8}{34} \end{pmatrix} \\ \text{б)} \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \\ \text{в)} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \\ \text{г)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ47◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, -1, 1, 0)$, $e_2 = (2, -1, -1, 2)$, $e_3 = (0, 2, 1, 0)$, $e_4 = (-1, -1, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-4, -17, 3, 5)$ в этом базисе.

ЕГ47◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (3, -1, 1, -1), \quad u_2 = (5, -3, 4, -2), \quad u_3 = (2, -1, 3, 1) \\ u_4 = (4, -2, 2, -2), \quad u_5 = (-3, 2, -3, 1)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-1, 6, -2, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ47◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 882 & 147 & -441 \\ 147 & 245 & -147 \\ -441 & -147 & 441 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ47◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, -3, 1, 2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(0, -1, 1, 2)$, $(2, -2, 2, 2)$, $(1, -1, 0, 4)$ и $(1, -2, 0, 3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ47◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}-1}{11} & \frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{66}-2\sqrt{6}}{44} & \frac{3\sqrt{6}+\sqrt{22}-6\sqrt{2}}{22} \\ \frac{-\sqrt{3}-3\sqrt{11}+2}{22} & \frac{15\sqrt{2}+\sqrt{6}}{22} & \frac{-3\sqrt{6}+\sqrt{22}+6\sqrt{2}}{22} \\ \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{11}+6}{22} & \frac{-9\sqrt{2}-\sqrt{66}+6\sqrt{6}}{44} & \frac{\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}+1}{11} & \frac{-\sqrt{2}+3\sqrt{22}+2}{22} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{22}-6}{22} \\ \frac{-\sqrt{2}-3\sqrt{22}+2}{22} & \frac{5\sqrt{2}+1}{11} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{22}-6}{22} \\ \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{22}-6}{22} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{22}-6}{22} & \frac{\sqrt{2}+9}{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{11}{28} & \frac{6-3\sqrt{42}}{28} & \frac{9+2\sqrt{42}}{28} \\ \frac{6+3\sqrt{42}}{28} & \frac{1}{14} & \frac{-18+\sqrt{42}}{28} \\ \frac{9-2\sqrt{42}}{28} & \frac{-18-\sqrt{42}}{28} & \frac{-13}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{1}{19} & \frac{-\sqrt{57}-\sqrt{3}}{19} & \frac{-3\sqrt{19}+3}{19} \\ \frac{-3\sqrt{19}+3}{19} & \frac{-3\sqrt{3}}{19} & \frac{\sqrt{19}+9}{19} \\ \frac{-3\sqrt{19}-3}{19} & \frac{-\sqrt{57}+9\sqrt{3}}{57} & \frac{-9}{19} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ48◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, 2, 0, 1)$, $e_2 = (-1, -1, -2, 2)$, $e_3 = (1, -2, 0, 1)$, $e_4 = (0, -1, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 2-ю координаты вектора $v = (9, 0, 14, -8)$ в этом базисе.

ЕГ48◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-7, 2, -4, -2), \quad u_2 = (0, 2, 0, 2), \quad u_3 = (-6, 1, -3, -2) \\ u_4 = (-2, 1, -2, -1), \quad u_5 = (1, -1, 2, 1)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (1, -1, 2, -2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ48◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 425 & 145 & -575 \\ 145 & 505 & -215 \\ -575 & -215 & 1625 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ48◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4, 5, 2, -5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4, 7, 3, -5)$, $(-3, 7, 2, -6)$, $(-4, 6, 4, -4)$ и $(-4, 7, 3, -4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ48◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+4}{6} & \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} \\ \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2}{12} \\ \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2}{12} & \frac{5\sqrt{2}+2}{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{-4-\sqrt{3}}{6} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} \\ \frac{-4+\sqrt{3}}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{-\sqrt{42}-6\sqrt{3}}{42} & \frac{-3\sqrt{14}+2}{14} \\ \frac{-\sqrt{14}+6}{14} & \frac{-3\sqrt{3}}{14} & \frac{2\sqrt{14}+3}{14} \\ \frac{-3\sqrt{14}-2}{14} & \frac{-2\sqrt{42}+3\sqrt{3}}{42} & \frac{-1}{14} \end{pmatrix}$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} \frac{-13}{18} & \frac{-4-3\sqrt{3}}{18} & \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} \\ \frac{-4+3\sqrt{3}}{18} & \frac{-13}{18} & \frac{1+3\sqrt{3}}{9} \\ \frac{1+3\sqrt{3}}{9} & \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{-5}{9} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ49◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 1, -1, 2)$, $e_2 = (2, 0, 2, 0)$, $e_3 = (-1, 2, 2, -1)$, $e_4 = (2, 0, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (17, -8, 6, 1)$ в этом базисе.

ЕГ49◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2, 3, -1, 0), \quad u_2 = (-3, -3, -3, 3), \quad u_3 = (0, -1, 5, -4) \\ u_4 = (1, 4, -1, -2), \quad u_5 = (-1, 0, -4, 3)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-2, 3, -2, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ49◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 272 & 104 & -88 \\ 104 & 296 & -40 \\ -88 & -40 & 200 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ49◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-2, 0, -3, 1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, 2, -2, 1)$, $(-3, 0, -1, 2)$, $(0, 0, -2, 1)$ и $(-1, -1, -1, 2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ49◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-\sqrt{15}}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{-\sqrt{15}}{10} & \frac{-7}{10} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-6\sqrt{2}-\sqrt{3}}{18} & \frac{-\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{-2\sqrt{6}+1}{6} & \frac{-\sqrt{3}}{18} & \frac{\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}-2}{6} & \frac{-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{18} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-5}{9} & \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{1+3\sqrt{3}}{9} \\ \frac{1+3\sqrt{3}}{9} & \frac{-13}{18} & \frac{-4+3\sqrt{3}}{18} \\ \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{-4-3\sqrt{3}}{18} & \frac{-13}{18} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} \\ \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} \\ \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4}{6} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ50◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (2, 0, -1, 0)$, $e_3 = (0, 2, 0, 2)$, $e_4 = (2, -2, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 2-ю координаты вектора $v = (0, -8, -6, -14)$ в этом базисе.

ЕГ50◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (3, -2, 1, 1), \quad u_2 = (-3, 0, 1, -1), \quad u_3 = (3, -1, 0, 1) \\ u_4 = (-5, 3, -2, -3), \quad u_5 = (3, -1, 2, 5)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-3, 1, -1, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ50◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 720 & -240 & -240 \\ -240 & 800 & 0 \\ -240 & 0 & 800 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ50◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, -4, -4, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1, -2, -4, -2)$, $(1, -3, -4, 0)$, $(2, -4, -3, -2)$ и $(0, -4, -4, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ50◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-7}{12} & \frac{-2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{1-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-2+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-5}{6} & \frac{2+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{1+6\sqrt{2}}{12} & \frac{2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-7}{12} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2}{12} \\ \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4}{6} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} \\ \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-15\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{24} & \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{12} & \frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{6}-2}{12} \\ \frac{6\sqrt{2}+6+4\sqrt{6}}{24} & \frac{-\sqrt{6}+4\sqrt{2}}{6} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}-4}{12} \\ \frac{-3\sqrt{2}+12-2\sqrt{6}}{24} & \frac{-2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{12} & \frac{-5\sqrt{3}+2}{12} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ51◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 0, 0, 2)$, $e_2 = (-2, -2, -1, 0)$, $e_3 = (-2, -2, -1, -2)$, $e_4 = (-2, 0, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 3-ю координаты вектора $v = (2, 6, 4, -9)$ в этом базисе.

ЕГ51◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-5, -6, 0, -5), \quad u_2 = (-1, -2, -2, -3), \quad u_3 = (6, 4, -6, 0) \\ u_4 = (2, 4, 3, 5), \quad u_5 = (-2, -3, -1, -3)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (4, -4, 3, -5)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ51◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 80 & -16 & 32 \\ -16 & 1040 & -64 \\ 32 & -64 & 272 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ51◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, -4, 0, 3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1, -3, 1, 3)$, $(0, -2, 1, 5)$, $(0, -3, 1, 3)$ и $(0, -5, 1, 4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ51◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}+8}{18} & \frac{2\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-7\sqrt{2}-8}{18} \\ \frac{-2-4\sqrt{2}}{9} & \frac{1-4\sqrt{2}}{9} & \frac{-2\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{-\sqrt{2}-8}{18} & \frac{2+4\sqrt{2}}{9} & \frac{-5\sqrt{2}+8}{18} \end{pmatrix} \\ \text{б)} \begin{pmatrix} \frac{-15\sqrt{2}+8\sqrt{6}}{36} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{9} & \frac{-4\sqrt{3}-11}{18} \\ \frac{3\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{18} & \frac{-4\sqrt{6}+\sqrt{2}}{9} & \frac{-\sqrt{3}+1}{9} \\ \frac{-12\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{36} & \frac{-\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{9} & \frac{-5\sqrt{3}+8}{18} \end{pmatrix} \\ \text{в)} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \\ \text{г)} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{3} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}-1}{3} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}-1}{3} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ52◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 1, 1, -1)$, $e_2 = (2, 1, -1, -2)$, $e_3 = (-1, -2, -2, 2)$, $e_4 = (0, 2, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (10, 0, -5, -6)$ в этом базисе.

ЕГ52◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-1, -5, 0, 4), \quad u_2 = (-2, 0, -5, -2), \quad u_3 = (1, 3, 1, -2) \\ u_4 = (-1, 3, -6, -4), \quad u_5 = (-1, -3, 0, 2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-4, 6, -6, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ52◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 464 & 256 & -544 \\ 256 & 320 & -320 \\ -544 & -320 & 1040 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ52◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(0, 5, -3, 4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(0, 6, -2, 6)$, $(1, 4, -1, 5)$, $(1, 6, -2, 4)$ и $(-1, 5, -3, 5)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ52◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-39\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{56} & \frac{-2\sqrt{6}-6\sqrt{7}-4\sqrt{2}}{28} & \frac{-3\sqrt{3}+2\sqrt{14}-6}{28} \\ \frac{-6\sqrt{2}+6\sqrt{21}-4\sqrt{6}}{56} & \frac{-5\sqrt{6}+4\sqrt{2}}{14} & \frac{6\sqrt{3}+\sqrt{14}+12}{28} \\ \frac{-9\sqrt{2}-4\sqrt{21}-6\sqrt{6}}{56} & \frac{6\sqrt{6}-2\sqrt{7}+12\sqrt{2}}{28} & \frac{-5\sqrt{3}+18}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}+2}{28} & \frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{14}-6}{28} \\ \frac{-2\sqrt{3}-3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{5\sqrt{3}+4}{14} & \frac{6\sqrt{3}-\sqrt{14}-12}{28} \\ \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{14}-6}{28} & \frac{6\sqrt{3}+\sqrt{14}-12}{28} & \frac{5\sqrt{3}+18}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}-2}{28} & \frac{2\sqrt{2}+4-6\sqrt{7}}{28} & \frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{7}+6}{28} \\ \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{5\sqrt{2}-4}{14} & \frac{-6\sqrt{2}+2\sqrt{7}-12}{28} \\ \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{7}+6}{28} & \frac{-6\sqrt{2}-2\sqrt{7}-12}{28} & \frac{5\sqrt{2}-18}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}}{11} & \frac{1-3\sqrt{33}}{22} & \frac{-3\sqrt{6}-3\sqrt{22}}{44} \\ \frac{\sqrt{3}+9\sqrt{11}}{66} & \frac{-6}{11} & \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{22}}{44} \\ \frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{11}}{66} & \frac{-3-\sqrt{33}}{22} & \frac{5\sqrt{6}}{11} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ53◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 0, -2, -1)$, $e_2 = (-2, 0, 1, 2)$, $e_3 = (0, -1, -2, -1)$, $e_4 = (0, 2, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-3, 4, 23, 14)$ в этом базисе.

ЕГ53◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-3, -6, -2, -1), \quad u_2 = (-4, 0, -2, 0), \quad u_3 = (-1, 2, -1, -1) \\ u_4 = (-4, 0, -1, 2), \quad u_5 = (2, -4, 0, -2)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-5, 3, -4, 3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ53◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 612 & -288 & -18 \\ -288 & 612 & -18 \\ -18 & -18 & 1602 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ53◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4, 3, -5, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, 2, -6, -1)$, $(-4, 4, -5, 0)$, $(-5, 3, -4, -1)$ и $(-2, 3, -4, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ53◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}-1}{5} & \frac{-\sqrt{2}\sqrt{5}}{5} & \frac{2+\sqrt{2}}{5} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2+\sqrt{2}}{5} & \frac{-\sqrt{2}\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{2}-8}{10} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}}{27} & \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{-9\sqrt{2}-\sqrt{6}}{18} \\ \frac{9+\sqrt{3}}{27} & \frac{-13}{18} & \frac{4\sqrt{6}-9\sqrt{2}}{36} \\ \frac{-9+\sqrt{3}}{27} & \frac{-4-3\sqrt{3}}{18} & \frac{13\sqrt{6}}{36} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{-7}{9} & \frac{-4}{9} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-3+6\sqrt{2}}{12} & \frac{-6-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-3-6\sqrt{2}}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{6-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ54◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, -1, -1, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 0, 1)$, $e_3 = (1, 0, 0, -1)$, $e_4 = (2, 0, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 4-ю и 1-ю координаты вектора $v = (9, -1, 1, -8)$ в этом базисе.

ЕГ54◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (6, -1, -2, 3), \quad u_2 = (7, -7, 1, -4), \quad u_3 = (-8, 3, 2, -3) \\ u_4 = (-6, 5, 0, 1), \quad u_5 = (9, -5, -1, 0)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (3, -5, 6, -3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ54◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 425 & 145 & -575 \\ 145 & 505 & -215 \\ -575 & -215 & 1625 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ54◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-1, -1, -1, -3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-2, -1, -2, -3)$, $(-2, -2, -1, -1)$, $(-1, -1, 0, -1)$ и $(-1, 0, 1, -2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ54◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{3}}{14} & \frac{2-3\sqrt{42}}{28} & \frac{-6\sqrt{6}-6\sqrt{7}}{56} \\ \frac{2\sqrt{3}+9\sqrt{14}}{84} & \frac{-15}{28} & \frac{3\sqrt{6}-12\sqrt{7}}{56} \\ \frac{6\sqrt{3}-3\sqrt{14}}{84} & \frac{-3-2\sqrt{42}}{28} & \frac{23\sqrt{6}}{56} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-2}{11} & \frac{6-3\sqrt{22}}{22} & \frac{6+3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{6+3\sqrt{22}}{22} & \frac{-9}{22} & \frac{2\sqrt{22}-9}{22} \\ \frac{6-3\sqrt{22}}{22} & \frac{-2\sqrt{22}-9}{22} & \frac{-9}{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-1}{26} & \frac{3\sqrt{39}}{26} & \frac{-9}{13} \\ \frac{-3\sqrt{39}}{26} & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{39}}{13} \\ \frac{-9}{13} & \frac{\sqrt{39}}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-10+4\sqrt{2}}{14} & \frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{6\sqrt{6}+2\sqrt{21}+12\sqrt{3}}{84} \\ \frac{4+6\sqrt{14}+4\sqrt{2}}{28} & \frac{-13\sqrt{2}+2}{28} & \frac{3\sqrt{6}-4\sqrt{21}+6\sqrt{3}}{84} \\ \frac{-12+2\sqrt{14}-12\sqrt{2}}{28} & \frac{-3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{5\sqrt{6}-18\sqrt{3}}{84} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ55◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, 0, 1, -1)$, $e_2 = (2, -2, 1, 1)$, $e_3 = (0, -1, 1, -2)$, $e_4 = (2, 1, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (20, -4, 0, 20)$ в этом базисе.

ЕГ55◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1, 3, 2, -3), \quad u_2 = (5, 7, 6, -5), \quad u_3 = (-1, -1, -1, -1) \\ u_4 = (2, 2, 2, -1), \quad u_5 = (-3, 1, -1, 1)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-1, 5, -2, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ55◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 80 & 32 & -16 \\ 32 & 272 & -64 \\ -16 & -64 & 1040 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ55◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, 1, -1, -3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, 0, 0, -1)$, $(3, 3, -2, -3)$, $(1, 0, 0, -1)$ и $(2, 3, -1, -2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ55◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-3-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{2} & \frac{6-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-3+6\sqrt{2}}{12} & \frac{6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-2+\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{18} \\ \frac{2\sqrt{3}-2-2\sqrt{2}}{6} & \frac{1-\sqrt{2}}{3} & \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{18} \\ \frac{-2\sqrt{3}-2-2\sqrt{2}}{6} & \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+2}{12} & \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}+4}{12} & \frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2}{12} \\ \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}+4}{12} & \frac{-\sqrt{3}+4}{6} & \frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{6}-4}{12} \\ \frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{6}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}-4}{12} & \frac{-5\sqrt{3}+2}{12} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ56◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, 0, -2, -2)$, $e_2 = (1, 0, -2, 0)$, $e_3 = (1, -1, -1, -1)$, $e_4 = (1, -1, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-9, -1, 1, -9)$ в этом базисе.

ЕГ56◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-2, 0, 2, 1), \quad u_2 = (-2, 2, 0, -1), \quad u_3 = (-4, 2, 2, 0) \\ u_4 = (-4, 1, 3, 1), \quad u_5 = (-4, 3, 5, 4)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (3, -3, 5, -5)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ56◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 1458 & -486 & -162 \\ -486 & 450 & -90 \\ -162 & -90 & 666 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ56◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(2, -4, 2, 1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, -2, 3, 3)$, $(1, -2, 3, 3)$, $(3, -4, 2, 2)$ и $(2, -5, 1, 2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ56◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-10+8\sqrt{2}}{18} & \frac{-2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{7\sqrt{6}+8\sqrt{3}}{54} \\ \frac{2\sqrt{2}+8}{9} & \frac{-4\sqrt{2}+1}{9} & \frac{-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{27} \\ \frac{-2-8\sqrt{2}}{18} & \frac{-4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{5\sqrt{6}-8\sqrt{3}}{54} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+8}{18} & \frac{-\sqrt{3}+1}{9} & \frac{-4\sqrt{3}-11}{18} \\ \frac{-\sqrt{3}-5}{9} & \frac{-4\sqrt{3}+1}{9} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-4\sqrt{3}-5}{18} & \frac{\sqrt{3}+5}{9} & \frac{-5\sqrt{3}+8}{18} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{3}-1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ57◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, -1, 2, 1)$, $e_2 = (-1, 2, -1, 0)$, $e_3 = (2, -1, 1, -1)$, $e_4 = (2, 0, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-1, 8, -9, 5)$ в этом базисе.

ЕГ57◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2, 1, 2, -1), \quad u_2 = (1, -1, -2, 2), \quad u_3 = (0, 3, 3, -2) \\ u_4 = (1, -1, -1, 1), \quad u_5 = (0, 0, -1, 1)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-3, 1, -5, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ57◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 612 & -288 & -18 \\ -288 & 612 & -18 \\ -18 & -18 & 1602 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ57◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(2, -5, -1, -2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1, -5, 0, -1)$, $(2, -4, 1, -3)$, $(2, -5, 0, -2)$ и $(4, -5, 1, -1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ57◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}-2}{28} & \frac{3\sqrt{3}+6-2\sqrt{14}}{28} & \frac{2\sqrt{3}+4+3\sqrt{14}}{28} \\ \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{5\sqrt{3}-18}{28} & \frac{-6\sqrt{3}+\sqrt{14}-12}{28} \\ \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{-6\sqrt{3}-\sqrt{14}-12}{28} & \frac{5\sqrt{3}-4}{14} \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{2}-2}{28} & \frac{-6\sqrt{3}+4\sqrt{42}+6\sqrt{6}}{56} & \frac{4+6\sqrt{14}-4\sqrt{2}}{28} \\ \frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{10\sqrt{3}+18\sqrt{6}}{56} & \frac{12-2\sqrt{14}-12\sqrt{2}}{28} \\ \frac{-2\sqrt{2}+6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{12\sqrt{3}+2\sqrt{42}-12\sqrt{6}}{56} & \frac{10+4\sqrt{2}}{14} \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-4+\sqrt{3}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{-\sqrt{3}-4}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2\sqrt{6}-1}{6} & \frac{-\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{-2\sqrt{6}-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{\sqrt{6}-2}{6} & \frac{\sqrt{6}+2}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ58◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, 1, 2, -1)$, $e_2 = (1, 1, -2, 1)$, $e_3 = (2, -1, -2, -1)$, $e_4 = (0, 0, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 2-ю и 1-ю координаты вектора $v = (2, -9, -4, -6)$ в этом базисе.

ЕГ58◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-3, -4, 2, -3), \quad u_2 = (-4, -4, 4, 0), \quad u_3 = (-3, -2, 4, -4) \\ u_4 = (3, 4, -2, -3), \quad u_5 = (0, 2, 2, -5)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (5, -2, 2, -1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ58◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 2448 & 432 & -912 \\ 432 & 2336 & -1360 \\ -912 & -1360 & 2000 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ58◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5, -3, -5, -4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(6, -3, -6, -5)$, $(6, -2, -6, -5)$, $(4, -3, -4, -4)$ и $(4, -3, -3, -3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ58◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-9\sqrt{2}-8}{26} & \frac{3\sqrt{39}}{26} & \frac{6-6\sqrt{2}}{13} \\ \frac{3\sqrt{26}}{26} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{-3\sqrt{2}+6}{13} & \frac{\sqrt{39}}{13} & \frac{4+9\sqrt{2}}{13} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{-6-3\sqrt{42}}{28} & \frac{18-\sqrt{42}}{28} \\ \frac{-6+3\sqrt{42}}{28} & \frac{11}{28} & \frac{9+2\sqrt{42}}{28} \\ \frac{18+\sqrt{42}}{28} & \frac{9-2\sqrt{42}}{28} & \frac{-13}{28} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3\sqrt{14}+2}{14} & \frac{\sqrt{14}-6}{14} \\ \frac{-3\sqrt{14}+2}{14} & \frac{1}{14} & \frac{-2\sqrt{14}-3}{14} \\ \frac{-\sqrt{14}-6}{14} & \frac{2\sqrt{14}-3}{14} & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-1}{26} & \frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{9}{13} \\ \frac{3\sqrt{39}}{26} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{-\sqrt{39}}{13} \\ \frac{-9}{13} & \frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{-7}{13} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ59◊1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, -2, 0, 2)$, $e_2 = (-2, 2, -1, 0)$, $e_3 = (-1, -1, 1, 0)$, $e_4 = (-1, 2, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 3-ю и 2-ю координаты вектора $v = (0, 7, -5, 1)$ в этом базисе.

ЕГ59◊2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-3, -5, -1, -3), \quad u_2 = (-4, -2, 1, -5), \quad u_3 = (3, 3, 0, 2) \\ u_4 = (-1, -1, 0, 0), \quad u_5 = (5, 7, 1, 5)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-2, 3, -1, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ59◊3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 612 & -18 & -288 \\ -18 & 1602 & -18 \\ -288 & -18 & 612 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ59◊4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5, 3, -3, -2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(6, 3, -3, -2)$, $(7, 4, -2, -2)$, $(6, 3, -2, -2)$ и $(7, 3, -4, -1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ59◊5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{3-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1}{2} & \frac{6+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{3+6\sqrt{2}}{12} & \frac{6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{6}+2}{6} & \frac{2\sqrt{6}-1}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{2}{3} & \frac{-\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{-2\sqrt{6}-1}{6} & \frac{\sqrt{6}-2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{36} & \frac{3-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-\sqrt{3}}{6} & \frac{-6-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-3-6\sqrt{2}}{12} & \frac{-6\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{36} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ \text{г) } \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2}{12} \\ \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4}{6} & \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} \\ \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2}{12} & \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ60♦1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, -1, -2, 0)$, $e_2 = (-2, -1, 2, 0)$, $e_3 = (-1, -1, 1, 0)$, $e_4 = (0, 1, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве \mathbb{Q}^4 ? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-11, -5, 11, 0)$ в этом базисе.

ЕГ60♦2. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (6, -5, 2, -1), \quad u_2 = (2, -1, 0, 0), \quad u_3 = (0, -1, 1, -3) \\ u_4 = (-4, 4, -2, 2), \quad u_5 = (8, -6, 2, 0)$$

вектор u_w , ближайший к вектору $w = (-1, 4, -5, 4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ60♦3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$((e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 882 & 147 & -441 \\ 147 & 245 & -147 \\ -441 & -147 & 441 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ60♦4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(3, 3, 2, 1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(4, 3, 2, 1)$, $(2, 4, 2, 3)$, $(3, 4, 3, 3)$ и $(3, 5, 2, 2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π , соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A . Найдите:

- а)** четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
- в)** расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
- г)** центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
- д)** центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3 .

ЕГ60♦5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства \mathbb{R}^3 имеет вид

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{-8}{19} & \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{19}}{38} & \frac{9-3\sqrt{57}}{38} \\ \frac{-9+3\sqrt{57}}{38} & \frac{-4\sqrt{3}}{57} & \frac{-27-\sqrt{57}}{38} \\ \frac{-9-3\sqrt{57}}{38} & \frac{-27\sqrt{3}+3\sqrt{19}}{114} & \frac{-4}{19} \end{pmatrix}$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} \frac{-9\sqrt{2}+1}{19} & \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{38}+6}{38} & \frac{-3\sqrt{2}+3\sqrt{38}-6}{38} \\ \frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{38}+6}{38} & \frac{-5\sqrt{2}+9}{19} & \frac{-9\sqrt{2}-\sqrt{38}-18}{38} \\ \frac{-3\sqrt{2}-3\sqrt{38}-6}{38} & \frac{-9\sqrt{2}+\sqrt{38}-18}{38} & \frac{-5\sqrt{2}+9}{19} \end{pmatrix}$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{3}-2}{28} & \frac{-2\sqrt{3}+4-3\sqrt{14}}{28} & \frac{-3\sqrt{3}+6+2\sqrt{14}}{28} \\ \frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{-5\sqrt{3}-4}{14} & \frac{6\sqrt{3}+\sqrt{14}-12}{28} \\ \frac{-3\sqrt{3}-2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{6\sqrt{3}-\sqrt{14}-12}{28} & \frac{-5\sqrt{3}-18}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} \frac{27\sqrt{2}+\sqrt{6}}{38} & \frac{-3\sqrt{6}+3\sqrt{38}+6\sqrt{2}}{38} & \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{19}-6}{38} \\ \frac{-9\sqrt{2}-3\sqrt{114}+6\sqrt{6}}{76} & \frac{5\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{19} & \frac{9\sqrt{3}-\sqrt{19}-18}{38} \\ \frac{9\sqrt{2}-3\sqrt{114}-6\sqrt{6}}{76} & \frac{9\sqrt{6}+\sqrt{38}-18\sqrt{2}}{38} & \frac{5\sqrt{3}+9}{19} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).