

§1. Координатная плоскость

1.1. Векторные пространства. Фиксируем произвольное поле \mathbb{k} , элементы которого будут далее называться *числами*. Будем называть *векторным пространством* над полем \mathbb{k} всякое множество V (его элементы будут далее называться *векторами*¹) с двумя операциями — *сложением векторов*, сопоставляющим любой паре векторов $v_1, v_2 \in V$ их сумму $v_1 + v_2 \in V$, и *умножением векторов на числа*, сопоставляющим любому вектору $v \in V$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{k}$ вектор $\lambda \cdot v \in V$, так что выполняются следующие аксиомы:

1) свойства сложения векторов:

- а) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in V$ (см. рис. 1◊1),
- б) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in V$ (см. рис. 1◊2),
- в) \exists нулевой вектор $0 \in V$, такой что $a + 0 = a \quad \forall a \in V$,
- г) $\forall a \in V \exists$ противоположный вектор $-a \in V$, такой что $a + (-a) = 0$;

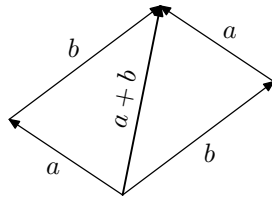


Рис. 1◊1. Правило параллелограмма.

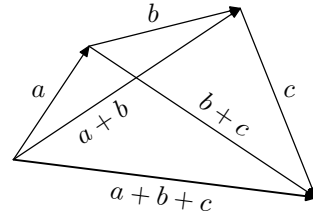


Рис. 1◊2. Правило 4-угольника.

2) свойства умножения векторов на числа:

- а) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a \quad \forall$ вектора $a \in V$ и \forall чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$,
- б) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \quad \forall$ вектора $a \in V$ и \forall чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$,
- в) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \quad \forall$ векторов $a, b \in V$ и \forall числа $\lambda \in \mathbb{k}$,
- г) $1 \cdot a = a \quad \forall$ вектора $a \in V$.

Подмножество U векторного пространства V называется *векторным подпространством*, если для любых двух векторов $u, w \in U$ в U все линейные комбинации $\lambda u + \mu w$ (с произвольными $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$) тоже лежат в U .

ПРИМЕР 1.1.

Простейший пример векторного пространства — это *нулевое пространство* 0 , состоящее из единственного нулевого вектора 0 , обратного самому себе и такого, что $\lambda \cdot 0 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{k}$.

¹векторы продуктивно представлять себе как направленные отрезки, рассматриваемые с точностью до параллельного переноса и обозначающие сдвиг

ПРИМЕР 1.2.

Само поле \mathbb{k} , в котором сложение векторов и умножение векторов на числа суть сложение и умножение, которые имеются в поле \mathbb{k} , является векторным пространством над \mathbb{k} . Написанные выше аксиомы являются частью аксиом, которым удовлетворяют сложение и умножение в поле (эти аксиомы будут подробно обсуждаться в курсе алгебры).

ПРИМЕР 1.3.

Первый содержательный пример векторного пространства, отличный от нуля и основного поля — это *координатная плоскость* \mathbb{k}^2 . Векторами пространства \mathbb{k}^2 по определению являются столбцы чисел $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $v_1, v_2 \in \mathbb{k}$. Сложение векторов и умножение векторов на числа определяются по координатам: если $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, и $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, то

$$\lambda \cdot a + \mu \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}.$$

Координатная плоскость \mathbb{k}^2 будет для нас в этом параграфе основным объектом изучения.

ЛЕММА 1.1

В каждом векторном пространстве V нулевой вектор $0 \in V$ единственен. Для любого $a \in V$ вектор $-a$, противоположный к вектору a , однозначно определяется по a . Кроме того,

$$0 \cdot a = 0 \quad \text{и} \quad (-1) \cdot a = -a$$

(в левых частях этих равенств 0 и -1 суть числа из \mathbb{k} , а в правых частях стоят векторы — нулевой и противоположный к a).

Доказательство. Для любых двух нулевых векторов $0_1, 0_2 \in V$ аксиоме 1(в) выполняется равенство

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2.$$

Если векторы b и c оба противоположны к a , то $b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c$. Равенство $0 \cdot a = 0$ получается после прибавления вектора $-a$, противоположного к a , к левой и правой частям равенства

$$a + 0 \cdot a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = (1 + 0) \cdot a = 1 \cdot a = a.$$

Т.к. $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$, вектор $(-1) \cdot a$ противоположен к a . \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1

Отображение $F : V \longrightarrow W$ из векторного пространства U в векторное пространство V называется *линейным*, если оно перестановочно со сложением векторов и умножением векторов на числа, т. е.

$$F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b) \quad \forall a, b \in V \text{ и } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}.$$

Векторные пространства, между которыми имеется взаимно однозначное линейное отображение, называются *изоморфными*, а само это отображение называется *изоморфизмом* векторных пространств.

Предостережение 1.1. Обратите внимание, что отображение $\varphi : \mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{k}$

$$\varphi(x) = a \cdot x + b$$

которое в школе принято называть «линейной функцией», в смысле опр. 1.1 линейно *только* при $b = 0$. Если же $b \neq 0$, то

$$\varphi(\lambda x) \neq \lambda \varphi(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x + y) \neq \varphi(x) + \varphi(y),$$

и φ не является линейным отображением.

Упражнение 1.1. Покажите, что любое линейное отображение F переводит нулевой вектор в нулевой вектор, а противоположный — в противоположный:

$$F(0) = 0 \quad \text{и} \quad \forall v \quad F(-v) = -F(v).$$

1.2. Пропорциональность векторов и определитель. Векторы a и b произвольного векторного пространства V называются *пропорциональными* (или *линейно зависимыми*), если $x \cdot a = y \cdot b$ для некоторых чисел $x, y \in \mathbb{k}$, не равных одновременно нулю.

Таким образом, нулевой вектор пропорционален любому вектору, а пропорциональность ненулевых векторов a и b означает, что $a = \lambda b$ и $b = \lambda^{-1}a$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \mathbb{k}$.

В координатном пространстве \mathbb{k}^2 из прим. 1.3. пропорциональность векторов

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

равносильна равенству перекрёстных произведений: $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Величина

$$\det(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1$$

называется *определителем* векторов a и b из \mathbb{K}^2 . Она, очевидно, обладает следующими свойствами:

$$\det(a, b) = 0 \iff a \text{ и } b \text{ пропорциональны} \quad (1-1)$$

$$\det(a, b) = -\det(b, a) \quad \forall a, b \in \mathbb{K}^2 \quad (1-2)$$

$$\det(\lambda a, b) = \lambda \det(a, b) = \det(a, \lambda b) \quad \forall a, b \in \mathbb{K}^2 \text{ и } \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad (1-3)$$

$$\begin{aligned} \det(a_1 + a_2, b) &= \det(a_1, b) + \det(a_2, b) \\ \det(a, b_1 + b_2) &= \det(a, b_1) + \det(a, b_2) \end{aligned} \quad \forall a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in \mathbb{K}^2 \quad (1-4)$$

Свойство (1-2) называется *кососимметричностью*, свойство (1-3) — *однородностью*, свойство (1-4) — *аддитивностью*. Вместе однородность и аддитивность означают, что определитель *линеен* по каждому из двух своих аргументов. Из этого вытекает, что определитель ведёт себя по отношению к двум своим аргументам так же, как произведение: для любых векторов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{K}^2$ и чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$ выполняется обычное правило раскрытия скобок¹

$$\begin{aligned} \det(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) &= \\ &= \alpha_1 \beta_1 \det(a_1, b_1) + \alpha_1 \beta_2 \det(a_1, b_2) + \alpha_2 \beta_1 \det(a_2, b_1) + \alpha_2 \beta_2 \det(a_2, b_2). \end{aligned} \quad (1-5)$$

ЛЕММА 1.2

Всякая пара непропорциональных векторов $a, b \in \mathbb{K}^2$ обладают тем свойством, что любой вектор $v \in \mathbb{K}^2$ единственным образом представляется в виде

$$v = x \cdot a + y \cdot b \quad \text{с } x, y \in \mathbb{K}. \quad (1-6)$$

Коэффициенты x, y этого разложения вычисляются по *правилу Крамера*

$$\begin{aligned} x &= \det(v, b) / \det(a, b) \\ y &= \det(a, v) / \det(a, b), \end{aligned} \quad (1-7)$$

Доказательство. Поскольку $\det(a, a) = \det(b, b) = 0$, из наличия разложения (1-6) вытекает, что

$$\begin{aligned} \det(a, v) &= \det(a, x \cdot a + y \cdot b) = x \cdot \det(a, a) + y \cdot \det(a, b) = y \cdot \det(a, b) \\ \det(v, b) &= \det(x \cdot a + y \cdot b, b) = x \cdot \det(a, b) + y \cdot \det(b, b) = x \cdot \det(a, b) \end{aligned}$$

откуда коэффициенты x и y однозначно выражаются в виде (1-7). Чтобы убедиться, в том, что равенство

$$v = \frac{\det(v, b)}{\det(a, b)} \cdot a + \frac{\det(a, v)}{\det(a, b)} \cdot b$$

¹В алгебре это свойство называется *дистрибутивностью*, а в школе — *распределительным законом умножения*

действительно выполнено для любого вектора v , заметим, что разность

$$v - \frac{\det(v, b)}{\det(a, b)} \cdot a$$

пропорциональна вектору b , поскольку

$$\det\left(v - \frac{\det(v, b)}{\det(a, b)} \cdot a, b\right) = \det(v, b) - \frac{\det(v, b)}{\det(a, b)} \cdot \det(a, b) = 0.$$

Но тогда

$$v = \frac{\det(v, b)}{\det(a, b)} \cdot a + \lambda \cdot b$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{k}$, и по правилу Крамера $\lambda = \det(a, v)/\det(a, b)$. \square

1.2.1. Базисы и координаты. Всякая пара ненулевых непропорциональных векторов (u_1, u_2) называется *базисом* векторного пространства \mathbb{k}^2 , и коэффициенты x_1, x_2 из линейного выражения $v = u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2$ произвольного вектора $v \in \mathbb{k}^2$ через векторы u_1, u_2 называются *координатами* вектора v в базисе (u_1, u_2) . Базис (e_1, e_2) , состоящий из векторов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

называется *стандартным* базисом координатной плоскости \mathbb{k}^2 . Координаты вектора $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ в стандартном базисе — это числа v_1 и v_2 .

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Пусть вектор v имеет в базисе (u_1, u_2) координаты $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, а векторы (u_1, u_2) , в свою очередь, имеют координаты $u_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix}$ и $u_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}$ в некотором другом базисе (w_1, w_2) . Найдите координаты вектора v в базисе (w_1, w_2) .

1.3. Площадь ориентированного параллелограмма. Всякая функция

$$s : \mathbb{k}^2 \times \mathbb{k}^2 \longrightarrow \mathbb{k},$$

сопоставляющая каждой упорядоченной паре векторов a, b на координатной плоскости \mathbb{k}^2 (над произвольным полем \mathbb{k}) число $s(a, b) \in \mathbb{k}$, называется *площадью ориентированного параллелограмма* со сторонами a и b , если для любых векторов a, b и любых чисел λ, μ выполняются следующие два свойства:

$$s(a, b + \lambda a) = s(a, b) = s(a + \mu b, b) \quad (1-8)$$

$$s(\lambda a, b) = \lambda s(a, b) = s(a, \lambda b). \quad (1-9)$$

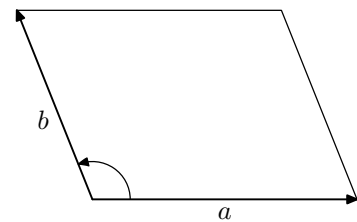


Рис. 1◊3. Ориентированный параллелограмм.

Первое свойство (1-8) означает, что площадь параллелограмма не меняется при его «заваливании на бок» параллельно одной из сторон: треугольник, который отрезается при этом от одного бока, параллельно сдвигается и приклеивается с другого (см. рис. 1◊4).

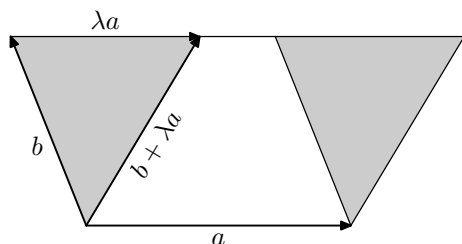


Рис. 1◊4. Площадь не меняется.

Второе свойство (1-9) утверждает, что при изменении одной из сторон параллелограмма в λ раз площадь также изменяется в λ раз. Это означает, в частности, что площадь *меняет знак* при смене знака одного из векторов:

$$s(-a, b) = -s(a, b) = s(a, -b).$$

В школьном курсе геометрии (где $\mathbb{k} = \mathbb{R}$) обычно принято считать, что площадь положительна и удовлетворяет более изысканному, чем (1-9), равенству

$$s(\lambda a, b) = s(a, \lambda b) = |\lambda| \cdot s(a, b).$$

Отказавшись от положительности, мы не просто упразднили модуль¹, но определили функцию, которая кроме абсолютной величины площади учитывает *ориентацию* параллелограмма.

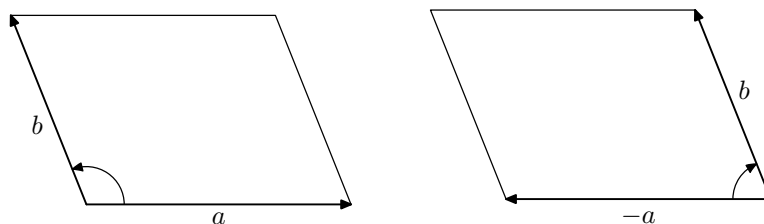


Рис. 1◊5. Смена ориентации при смене знака.

Дело в том, что на вещественной координатной плоскости $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ упорядоченные пары векторов (a, b) геометрически отличаются друг от друга тем, в какую сторону происходит кратчайший поворот, совмещающий направление первого вектора с направлением второго. Те пары векторов, для которых такой поворот происходит против часовой стрелки, называются *положительно ориентированными*, а те, для которых по часовой стрелке — *отрицательно ориентированными*.

Равенство $s(-a, b) = -s(a, b)$ таким образом означает, что площадь меняет знак при смене ориентации параллелограмма на противоположную (см. рис. 1◊5).

¹что упрощает вычисления и делает их осмысленными над любым полем

ЛЕММА 1.3

Всякая функция площади s на координатной плоскости \mathbb{k}^2 (над произвольным полем \mathbb{k}) автоматически кососимметрична, обращается в нуль на пропорциональных векторах и аддитивна:

$$s(a, b + c) = s(a, b) + s(a, c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{k}^2. \quad (1-10)$$

Доказательство. Первые два утверждения вытекают прямо из (1-8) и (1-9):

$$\begin{aligned} s(a, b) &= s(a, a + b) = s(a - (a + b), a + b) = s(-b, a + b) = -s(b, a + b) = -s(a, b) \\ s(a, \lambda a) &= s(a, 0 + \lambda a) = s(a, 0) = s(a, 0 \cdot 0) = 0 \cdot s(a, 0) = 0 \end{aligned}$$

Для доказательства аддитивности заметим, что если вектор a пропорционален и вектору b и вектору c , то он пропорционален и вектору $b + c$, и значит все три площади в равенстве (1-10) в этом случае зануляются. Если же вектор a не пропорционален какому-нибудь из векторов b, c , скажем, b , то векторы a и b составляют базис, и $c = \alpha a + \beta b$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. В этом случае обе части равенства переписываются как

$$\begin{aligned} s(a, b + c) &= s(a, b + \alpha a + \beta b) = s(a, (1 + \beta)b) = (1 + \beta)s(a, b) \\ s(a, b) + s(a, c) &= s(a, b) + s(a, \alpha a + \beta b) = s(a, b) + s(a, \beta b) = \\ &= s(a, b) + \beta s(a, b) = (1 + \beta)s(a, b), \end{aligned}$$

что и требовалось. □

ТЕОРЕМА 1.1

Площадь на \mathbb{k}^2 существует и единственна с точностью до умножения на константу. Она имеет вид $s(a, b) = c \cdot \det(a, b)$, где константа $c = s(e_1, e_2) \in \mathbb{k}$ — это площадь стандартного базисного параллелограмма.

Доказательство. Из аддитивности, однородности и кососимметричности величины $s(a, b)$ вытекает, что она подчиняется тому же самому дистрибутивному закону (1-5), что и определитель: $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{k}^2$ и $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{k}$

$$\begin{aligned} s(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) &= \\ &= \alpha_1 \beta_1 \cdot s(a_1, b_1) + \alpha_1 \beta_2 \cdot s(a_1, b_2) + \alpha_2 \beta_1 \cdot s(a_2, b_1) + \alpha_2 \beta_2 \cdot s(a_2, b_2) \end{aligned}$$

Поэтому для любой пары векторов $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$

$$\begin{aligned} s(a, b) &= s(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) s(e_1, e_2) = \det(a, b) \cdot s(e_1, e_2). \end{aligned} \quad (1-11)$$

С другой стороны, из свойств определителя (1-1)–(1-4) вытекает, что

$$s(a, b) = c \cdot \det(a, b)$$

удовлетворяет соотношениям (1-8) и (1-9). □

СЛЕДСТВИЕ 1.1

Координатами вектора $v = ax + by$ в произвольном базисе (a, b) плоскости \mathbb{k}^2 являются отношения площадей¹ $x = s(v, b)/s(a, b)$, $y = s(a, v)/s(a, b)$.

1.4. Аффинная координатная плоскость $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{k})$ это пространство, точками которого являются пары чисел $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$. Их можно представлять себе как концы всевозможных векторов $v = \overrightarrow{OP} \in \mathbb{k}^2$, отложенных от «начала координат» — точки $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Однако, точка O ничем не лучше любой другой — для каждой точки $P \in \mathbb{A}^2$ отображение «откладывания векторов» от точки P

$$\mathbb{k}^2 \xrightarrow{v \mapsto P+v} \mathbb{A}^2$$

устанавливает биекцию между векторами координатной плоскости \mathbb{k}^2 и точками аффинной плоскости \mathbb{A}^2 . Иначе можно сказать, что с каждой парой точек $P, Q \in \mathbb{A}^2$ связан вектор $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, и при фиксированной точке P отображение

$$\mathbb{A}^2 \xrightarrow{Q \mapsto \overrightarrow{PQ}} \mathbb{k}^2,$$

устанавливает биекцию между точками аффинной плоскости \mathbb{A}^2 и векторами координатной плоскости \mathbb{k}^2 .

ЛЕММА 1.4

Для любых точек $Q_1, Q_2, \dots, Q_m \in \mathbb{A}^2$ и чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{k}$ с ненулевой суммой $\sum_{i=1}^m \mu_i = \mu \neq 0$ существует единственная точка $M \in \mathbb{A}^2$, такая что

$$\mu_1 \overrightarrow{MQ_1} + \mu_2 \overrightarrow{MQ_2} + \dots + \mu_m \overrightarrow{MQ_m} = 0. \quad (1-12)$$

Для произвольным образом выбранной точки $P \in \mathbb{A}^2$ точку M можно описать как

$$M = P + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overrightarrow{PQ_i}. \quad (1-13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой пары точек $M, P \in \mathbb{A}^2$ выполнено соотношение

$$\sum \mu_i \cdot \overrightarrow{PQ_i} = \sum \mu_i \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ_i}) = \mu \cdot \overrightarrow{PM} + \sum \mu_i \cdot \overrightarrow{MQ_i}.$$

Поэтому равенство (1-12) равносильно равенству (1-13). \square

¹обратите внимание, что эти отношения не зависят от выбора функции площади

1.4.1. Бариецентрические комбинации точек. Точка M из лем. 1.4 называется *центром тяжести* или *бариенцентром* точек Q_i с весами μ_i . Этот термин пришёл из механики.

Пусть плоскость \mathbb{R}^2 горизонтально располагается в трёхмерном пространстве, и к каждой из точек Q_i в перпендикулярном к плоскости направлении приложена сила μ_i — вниз, если $\mu > 0$, и вверх, если $\mu < 0$ (см. рис. 1◊6).

Равенство (1-12) означает в этом случае равенство нулю суммы моментов всех этих сил относительно точки M . Если оно выполняется, плоскость останется неподвижной, будучи удержана ровно за одну точку M .

Из леммы лем. 1.4 вытекает, что для любых наборов точек Q_1, Q_2, \dots, Q_m и констант $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ с суммой $\sum \mu_i = 1$, точка

$$\mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2 + \dots + \mu_m Q_m \stackrel{\text{def}}{=} P + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot \overrightarrow{PQ_i} \quad (1-14)$$

не зависит от выбора «начальной» точки P . Она называется *бариецентрической комбинацией* точек Q_1, Q_2, \dots, Q_m с весами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3 (ГРУППИРОВАНИЕ МАСС). Пусть набор точек Q_i с весами μ_i и набор точек T_j с весами ν_j имеют центры тяжести в точках M и N , причём все три суммы: $\sum \mu_i$, $\sum \nu_j$ и $\sum \mu_i + \sum \nu_j$ ненулевые. Покажите, что центр тяжести объединения всех точек¹ Q_i и T_j совпадает с центром тяжести точек M и N , взятых с весами $\sum \mu_i$ и $\sum \nu_j$.

Из этой задачи вытекает, среди прочего, что бариецентрическая комбинация точек, которые сами являются бариецентрическими комбинациями некоторых других точек, также представляет собою бариецентрическую комбинацию этих последних точек.

1.4.2. Коллинеарные точки и прямые. Три точки A, B, C на аффинной плоскости \mathbb{A}^2 называются *коллинеарными*, если векторы \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} пропорциональны. Условие пропорциональности векторов \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} можно переписать в виде $\alpha \cdot \overrightarrow{CA} + \beta \cdot \overrightarrow{CB} = 0$. При $A \neq B$ в этом равенстве $\alpha + \beta \neq 0$, и оно означает, что C является бариенцентром точек A и B , взятых с весами α и β :

$$C = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} A + \frac{\beta}{\alpha + \beta} B.$$

¹ «объединение» совпадающих точек заключается в сложении их весов

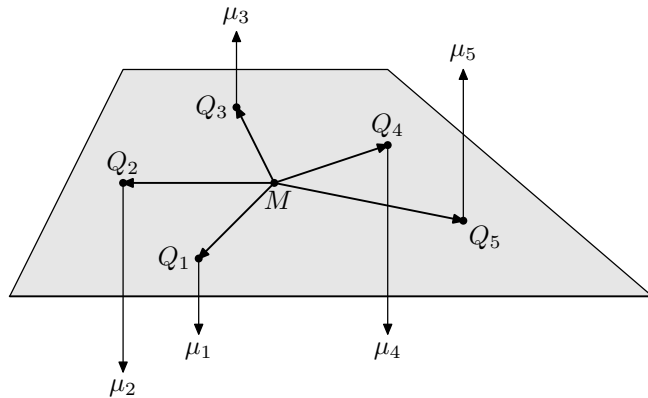


Рис. 1◊6. Моменты сил.

В этом случае говорят также, что C делит AB в отношении $\beta : \alpha$. Точка, делящая AB в отношении $1 : 1$ называется *серединой* AB .

Множество всех точек C , коллинеарных двум данным различным точкам A, B называется *прямой* и обозначается (A, B) .

Таким образом, прямая (A, B) состоит из всех точек вида

$$C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B, \quad \text{где } \alpha, \beta \in \mathbb{k} \text{ и } \alpha + \beta = 1.$$

Иначе можно сказать, что прямая (A, B) состоит из всех точек вида

$$C = A + vt, \tag{1-15}$$

где t пробегает \mathbb{k} , а $v \in \mathbb{k}^2$ — какой-нибудь фиксированный ненулевой вектор, пропорциональный вектору \overrightarrow{AB} . Он называется *направляющим вектором* или *вектором скорости* прямой (A, B) .

Соотношение (1-15) равносильно пропорциональности векторов \overrightarrow{AC} и v , что записывается уравнением $\det(v, \overrightarrow{AC}) = 0$. Если обозначить радиус векторы фиксированной точки A и переменной точки C через $a = \overrightarrow{OA}$ и $x = \overrightarrow{OC}$, то уравнение $\det(v, \overrightarrow{AC}) = 0$ можно переписать как

$$\det(v, x) = \det(v, a). \tag{1-16}$$

Отметим, что любое уравнение первой степени на координаты x_1 и x_2 вектора $x \in \mathbb{k}^2$:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = c \tag{1-17}$$

есть уравнение вида (1-16), в котором $v = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix}$, а $c = \det(v, a)$.

Таким образом, любое уравнение (1-17), в котором коэффициенты (α_1, α_2) не обращаются одновременно в нуль, задаёт прямую, заметаемую концами векторов $x = a + vt$, где a — какое-нибудь одно решение уравнения (1-17), а t пробегает \mathbb{k} . Эта прямая может быть описана как геометрическое место концов векторов x , составляющих с заданным вектором $v = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix}$ параллелограмм заданной площади c (см. рис. 1◊7).

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Напишите уравнение прямой, проходящей

- через точку $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ параллельно вектору $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
- через точки $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями

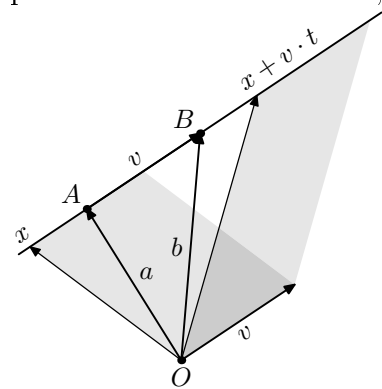


Рис. 1◊7. Прямая (A, B) с направляющим вектором $v = b - a$.

$$\text{а) } 3x_1 + 5x_2 = -1 \quad \text{б) } 2x_1 - 3x_2 = 5.$$

Согласно правилу Крамера¹, пересечение прямых, заданных уравнениями

$$\det(u, x) = c \quad \text{и} \quad \det(w, x) = d$$

с непропорциональными направляющими векторами u и w , состоит ровно из одной точки

$$x = \frac{cw - du}{\det(u, w)}.$$

Если направляющие векторы пропорциональны: скажем, $w = \lambda u$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{k}$, то $\det(w, x) = \lambda \det(u, x)$, и при $d \neq \lambda c$ прямые будут параллельны, а при $d = \lambda c$ совпадут. Таким образом, мы доказали обе теоремы из упр. 0.1, причём над произвольным полем \mathbb{k} .

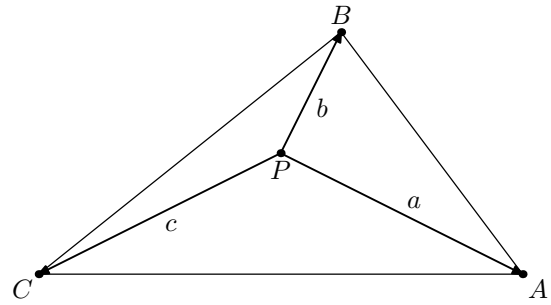
УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Пусть $\mathbb{k} = \mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Сколько имеется в пространстве $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_q)$ точек, прямых и прямых, проходящих через фиксированную точку? Нарисуйте все прямые, проходящие через начало координат в $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_5)$, где $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/(5)$ — поле вычетов по модулю 5.

1.4.3. Треугольники. Тройка не коллинеарных точек A, B, C называется *трёхвершинником* (или *треугольником*).

Для произвольной точки $P \in \mathbb{A}^2$ обозначим через

$$a = \overrightarrow{PA}, \quad b = \overrightarrow{PB}, \quad c = \overrightarrow{PC} \quad (1-18)$$

концы векторов, ведущих из P в вершины треугольника ABC (см. рис. 1◊8).



Если A, B, P не коллинеарны, векторы a и b составят базис в \mathbb{k}^2 , и разложение вектора c по этому базису по следствию сл. 1.1 имеет вид

$$c = \frac{s(c, b)}{s(a, b)} a + \frac{s(a, c)}{s(a, b)} b.$$

Домножая на знаменатель, получаем равенство, справедливое уже для любой точки, включая точки $P \in (A, B)$:

$$s(a, b) \cdot c + s(b, c) \cdot a + s(c, a) \cdot b = 0. \quad (1-19)$$

Таким образом, произвольная точка $P \in \mathbb{A}^2$ является центром тяжести точек A, B, C взятых с весами $s(PBC)$, $s(PCA)$, $s(PAB)$, где $s(XYZ)$ обозначает *площадь ориентированного треугольника ΔXYZ* , по определению, равную половине площади ориентированного параллелограмма:

$$s(XYZ) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \cdot s(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ})$$

¹см. лем. 1.2 на стр. 10

УПРАЖНЕНИЕ 1.7. Убедитесь, что

$$s(XYZ) = s(YZX) = s(ZXY) = -s(YXZ) = -s(XZY) = -s(ZYX).$$

Поскольку $s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = s(b - a, c - a) = s(a, b) + s(b, c) + s(c, a)$, мы имеем равенства

$$s(ABC) = s(PBC) + s(PCA) + s(PAB). \quad (1-20)$$

$$P = \frac{s(PBC)}{s(ABC)} A + \frac{s(PCA)}{s(ABC)} B + \frac{s(PAB)}{s(ABC)} C. \quad (1-21)$$

Коэффициенты разложения (1-21) называются *барицентрическими координатами* точки P относительно трёхвершинника ABC .

ТЕОРЕМА 1.2

Для любых трёх неколлинеарных точек A, B, C сопоставление каждой тройке чисел (α, β, γ) с суммой $\alpha + \beta + \gamma = 1$ барицентра точек A, B, C с весами α, β, γ :

$$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между такими тройками чисел и точками аффинной плоскости \mathbb{A}^2 .

Доказательство. Мы уже видели выше, что всякая точка P является барицентром точек A, B, C с подходящими весами, и нам остаётся лишь проверить единственность такого представления. Поскольку точки A, B, C не коллинеарны, хотя бы два из векторов a, b, c в (1-18) не пропорциональны. Будем считать, что это a и b . Тогда вектор c *однозначно* представляется в виде $c = x \cdot a + y \cdot b$. Равенство $P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$, по определению, означает равенство $\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c = 0$. Подставляя в него разложение c , получаем $(\alpha + \gamma x) \cdot a + (\beta + \gamma y) \cdot b = 0$. Так как a и b не пропорциональны, оба коэффициента обращаются в нуль, и мы получаем систему уравнений $\alpha + \gamma x = 0$, $\beta + \gamma y = 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, из которой α, β, γ однозначно находятся. \square

ПРИМЕР 1.4. (ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА)

Равновесный барицентр

$$M = \frac{1}{3} (A + B + C)$$

трёх неколлинеарных точек $A, B, C \in \mathbb{A}^2$ называется *центром тяжести* треугольника ABC . По упр. 1.3, точка M является центром тяжести вершины и середины противоположащей ей стороны, взятой с весом 2 (см. рис. 1◊9).

Таким образом, M является точкой пересечения медиан и делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Из формулы (1-21) и теор. 1.2 вытекает, что центр тяжести треугольника можно также охарактеризовать как единственную точку M на плоскости, для которой $s(MAB) = s(MBC) = s(MCA)$.

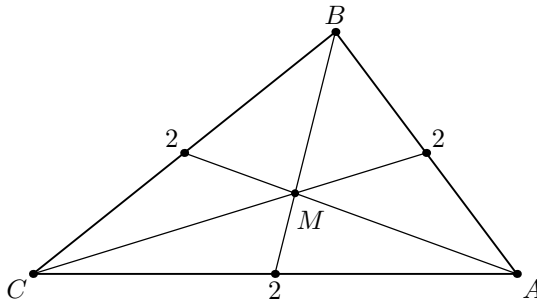


Рис. 1◊9. Центр треугольника.

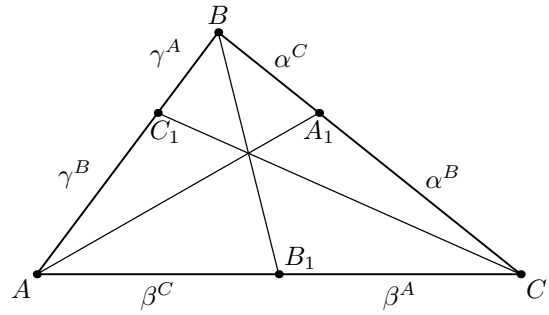


Рис. 1◊10. К теореме Чевы.

УПРАЖНЕНИЕ 1.8 (ТЕОРЕМА ЧЕВЫ). Пусть на прямых BC , AC и AB , соединяющих три неколлинеарных точки A , B , C , отмечены точки $A_1 = \alpha^B B + \alpha^C C$, $B_1 = \beta^A A + \beta^C C$, $C_1 = \gamma^A A + \gamma^B B$. Покажите, что в точки A , B , C тогда и только тогда можно поместить веса α , β , γ так, чтобы центр тяжести точек A и B оказался в точке C_1 , центр тяжести точек B и C — в точке A_1 , а центр тяжести точек C и A — в точке B_1 , когда

$$\frac{\alpha^B}{\alpha^C} \cdot \frac{\beta^C}{\beta^A} \cdot \frac{\gamma^A}{\gamma^B} = 1.$$

Выведите из этого необходимое и достаточное условие прохождения трёх прямых (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) через одну точку (см. рис. 1◊10).

1.5. Евклидова координатная плоскость. Этот раздел будет посвящён метрической геометрии, т. е. вычислению расстояний и углов. Величины эти являются *действительными числами* и многие вопросы про них связаны со специфическими для поля \mathbb{R} понятиями *неравенства* и *близости*. Поэтому всюду дальше мы будем работать над полем вещественных чисел $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2

Скалярным произведением (или *евклидовой структурой*) на векторном пространстве V над полем \mathbb{R} называется функция $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющая каждой паре векторов $u, w \in V$ число $(u, w) \in \mathbb{R}$ так, что для любых векторов u, w из V и чисел λ, μ из \mathbb{R} выполняются свойства¹:

$$(u, w) = (w, u) \tag{1-22}$$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \\ = \lambda_1 \mu_1 (u_1, w_1) + \lambda_1 \mu_2 (u_1, w_2) + \lambda_2 \mu_1 (u_2, w_1) + \lambda_2 \mu_2 (u_2, w_2) \end{aligned} \tag{1-23}$$

$$(v, v) > 0 \quad \forall \text{ ненулевого } v \in V \tag{1-24}$$

Векторы u, w , для которых $(u, v) = 0$ называются *ортогональными* или *перпендикулярными*.

¹свойство (1-22) называют *симметричностью*, свойство (1-23) — *билинейностью*, а свойство (1-24) — *положительностью*

ПРИМЕР 1.5. (СТАНДАРТНАЯ ЕВКЛИДОВА СТРУКТУРА НА \mathbb{R}^2)

Для двух векторов

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

положим

$$(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 \in \mathbb{R}. \quad (1-25)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.9. Убедитесь, что это сопоставление обладает свойствами (1-22)–(1-24).

Скалярное произведение (1-25) называется *стандартной евклидовой структурой* на \mathbb{R}^2 .

1.5.1. Длина. Для любого вектора v в произвольном евклидовом пространстве V неотрицательное число

$$|v| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)}$$

называется *длиной* вектора v . Если векторы a и b перпендикулярны, квадрат длины вектора $c = b - a$, соединяющего их концы (см. рис. 1◊11), находится по *теореме Пифагора*:

$$|c|^2 = (c, c) = (b - a, b - a) = (a, a) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1

В любом евклидовом пространстве для любого вектора b и любого ненулевого вектора a существует единственный вектор a_b , пропорциональный a , такой что разность $b - a_b$ перпендикулярна a (см. рис. 1◊12). Это единственный пропорциональный a вектор, для которого¹

$$|b - a_b| = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} |b - \lambda a|.$$

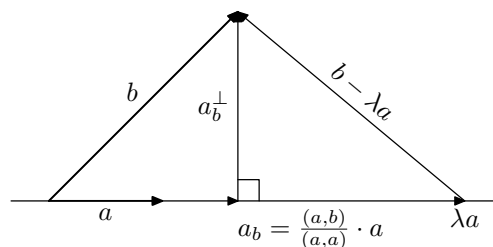


Рис. 1◊12. Ортогональная проекция.

Доказательство. Перпендикулярность векторов $b - \lambda a$ и a , т. е. равенство

$$(a, b - \lambda a) = (a, b) - \lambda(a, a) = 0$$

равносильна равенству $\lambda = (a, b)/(a, a)$. Поэтому

$$a_b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(a, b)}{(a, a)} \cdot a \quad (1-26)$$

¹иными словами, из произвольно заданной точки можно провести единственный перпендикуляр к произвольно заданной прямой, причём расстояние от заданной точки до основания этого перпендикуляра будет строго меньше расстояния от заданной точки до любой другой точки заданной прямой

это единственный пропорциональный a вектор, для которого разность

$$a_b^\perp \stackrel{\text{def}}{=} a - \frac{(a, b)}{(a, a)} \cdot a \quad (1-27)$$

перпендикулярна вектору a . Запишем теперь произвольный пропорциональный a вектор λa как $\lambda a = a_b + \mu \cdot a$ и перепишем разность $b - \lambda a$ в виде

$$b - \lambda a = b - a_b - \mu a = a_b^\perp - \mu a.$$

Тогда по теореме Пифагора $|b - \lambda a|^2 = |a_b^\perp - \mu a|^2 = |a_b^\perp|^2 + \mu^2 |a|^2 \geq |a_b^\perp|^2$, где равенство возможно только при $\mu = 0$, т. е. когда $b - \lambda a = a_b^\perp$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3

Векторы a_b и a_b^\perp , определённые равенствами (1-26) и (1-27), называются, соответственно, *ортогональной проекцией* вектора b на вектор a и *нормальной составляющей* вектора b относительно a .

СЛЕДСТВИЕ 1.2 (НЕРАВЕНСТВО КОШИ – БУНЯКОВСКОГО – ШВАРЦА)

Для любых двух векторов a, b в произвольном евклидовом пространстве выполняется неравенство

$$(a, b)^2 \leq (a, a) \cdot (b, b), \quad (1-28)$$

которое обращается в равенство, если и только если векторы a и b пропорциональны.

Доказательство. Если оба вектора нулевые, обе части неравенства обращаются в нуль. Если $a \neq 0$, то длина нормальной составляющей вектора b относительно вектора a неотрицательна

$$(a_b^\perp, a_b^\perp) = (b, b) - \frac{(a, b)^2}{(a, a)} \geq 0$$

и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $b = a_b$ пропорционален a . Домножая на (a, a) , получаем (1-28). \square

СЛЕДСТВИЕ 1.3 (НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА)

Для любых двух векторов в произвольном евклидовом пространстве выполняется *неравенство треугольника*¹ (см. рис. 1◊13):

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^2, \quad (1-29)$$

обращающееся в равенство, если и только если a и b пропорциональны и *сонаправлены*².

¹чем, собственно, и оправдывается термин «длина»

²т. е. один получается из другого умножением на *положительное* число

Доказательство. Возводя обе части (1-29) в квадрат, получаем эквивалентное (1-29) неравенство $(a+b, a+b) \leq (a, a) + 2|a| \cdot |b| + (b, b)$, которое после раскрытия скобок в левой части и очевидных сокращений превращается в неравенство

$$(a, b) \leq |a| \cdot |b|, \quad (1-30)$$

заведомо строгое при $(a, b) < 0$, а при $(a, b) \geq 0$ равносильное неравенству Коши – Буняковского – Шварца (1-28), получающемуся из (1-30) возведением обеих частей в квадрат. \square

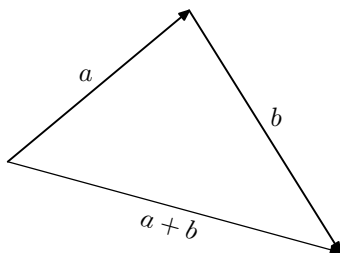


Рис. 1-13. Неравенство треугольника.

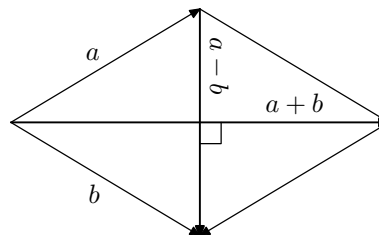


Рис. 1-14. Диагонали ромба перпендикулярны.

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Проверьте, что диагонали ромба перпендикулярны (т. е. для любых двух векторов a, b одинаковой длины $|a| = |b|$ выполнено соотношение $(a+b, a-b) = 0$), см. рис. 1-14).

1.5.2. Ортонормальные базисы. Векторы длины 1 называются *единичными*. Базис пространства \mathbb{R}^2 , образованный двумя перпендикулярными единичными векторами, называется *ортонормальным* базисом. Таким образом, таблица попарных скалярных произведений векторов ортонормального базиса e_1, e_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ортонормальные базисы существуют для любого скалярного произведения: если векторы a и b не пропорциональны друг другу, то векторы

$$e_1 = a/|a|, \quad e_2 = a_b^\perp/|a_b^\perp|,$$

где $a_b^\perp = b - a \cdot (a, b)/(a, a)$, составляют ортонормальный базис.

УПРАЖНЕНИЕ 1.11. Убедитесь в этом прямым вычислением.

Предложение 1.2

Коэффициенты разложения произвольного вектора $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ по любому ортонормальному базису e_1, e_2 можно вычислять по формулам

$$x_1 = (u, e_1), \quad x_2 = (u, e_2),$$

а скалярное произведение векторов $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ и $w = y_1 e_1 + y_2 e_2$ имеет стандартный вид $(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Доказательство. Вычисляя скалярное произведение обеих частей равенства

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

сначала с вектором e_1 , а потом с вектором e_2 , совершенно так же как и в доказательстве лем. 1.2, получаем первое утверждение. Второе получается раскрытием скобок в $(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2)$. \square

Предложение 1.3 (определитель Грама)

Для любого ортонормального базиса e_1, e_2 и любых двух векторов $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ и $w = y_1 e_1 + y_2 e_2$ имеет место равенство¹:

$$\det^2 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{pmatrix}$$

(правый определитель называется *определителем Грама* векторов u, w).

Доказательство. Прямое вычисление с использованием второго утверждения из предл. 1.2 даёт:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{pmatrix} &= (u, u) \cdot (w, w) - (u, w)^2 = \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 = \\ &= (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2 - 2x_1 y_1 x_2 y_2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \end{aligned}$$

что и требовалось. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.12. Выведите из предл. 1.3 другое доказательство неравенства Коши–Буняковского–Шварца (1-28).

Следствие 1.4

При любом выборе площади на \mathbb{R}^2 все ортонормальные базисы имеют равные по абсолютной величине площади.

Доказательство. Если векторы u, w в предл. 1.3 также образуют ортонормальный базис, то их определитель Грама

$$\det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

откуда по теор. 1.1 и предл. 1.3

$$s^2(u, w) = \det^2(u, w) \cdot s^2(e_1, e_2) = \det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{pmatrix} \cdot s^2(e_1, e_2) = s^2(e_1, e_2),$$

т. е. $s(u, w) = \pm s(e_1, e_2)$. \square

¹означающее, что определитель таблицы умножения двух векторов равен квадрату отношения площади натянутого на них параллелограмма к площади произвольного квадрата со стороной 1

1.5.3. Евклидова площадь и ориентация. Поскольку при смене знака одного из векторов площадь меняет знак, все ортонормальные базисы пространства \mathbb{R}^2 распадаются на два класса так, что площади любых двух базисов из одного класса равны, а площади любых двух базисов из разных классов противоположны по знаку. Базисы, принадлежащие к одному классу, называются *одинаково ориентированными*.

Фиксируем какой-нибудь ортонормальный базис (e_1, e_2) и будем называть *евклидовой ориентированной площадью* на \mathbb{R}^2 ту (единственную) площадь s , для которой $s(e_1, e_2) = 1$. При этом площади всех ортонормальных базисов той же ориентации, что и выбранный, будут равны 1, а площади всех ортонормальных базисов противоположной ориентации будут равны -1 .

Отметим, что определитель $\det(a, b)$ координат произвольных двух векторов $a, b \in \mathbb{R}^2$ относительно *любого* положительно ориентированного ортонормального базиса пространства \mathbb{R}^2 не зависит от выбора такого базиса, поскольку равен евклидовой площади параллелограмма, натянутого на векторы a, b . В дальнейшем мы частенько будем писать $\det(a, b)$ для обозначения евклидовой площади этого параллелограмма.

УПРАЖНЕНИЕ 1.13. Покажите, что абсолютная величина евклидовой площади параллелограмма равна произведению длины основания на длину опущенной на него высоты: $|\det(a, b)| = |a| \cdot |a_b^\perp|$.

1.6. Углы и тригонометрия. Коэффициенты x, y разложения

$$f = e \cdot x + e^\perp \cdot y$$

единичного вектора f по положительно ориентированному ортонормальному базису e, e^\perp называются *синусом* и *косинусом ориентированного угла*

$$\varphi = \widehat{ef} \tag{1-31}$$

от e к f . Согласно лем. 1.2 и предл. 1.2 их можно вычислять по любой из формул

$$\begin{aligned} \cos \widehat{ef} &= (e, f) = \det(f, e^\perp) \\ \sin \widehat{ef} &= \det(e, f) = (e^\perp, f). \end{aligned} \tag{1-32}$$

Из равенства $1 = (f, f) = x^2 + y^2$ вытекает «основное тригонометрическое тождество»

$$\cos^2 \widehat{ef} + \sin^2 \widehat{ef} = 1$$

и неравенства $-1 \leq \cos \widehat{ef} \leq 1$ и $-1 \leq \sin \widehat{ef} \leq 1$.

Записывая равенство (1-19) для трёх векторов a, b, c единичной длины в виде

$$\det(a, b) \cdot c + \det(b, c) \cdot a + \det(c, a) \cdot b = 0 \tag{1-33}$$

и умножая его скалярно на b , получаем тригонометрическую «формулу сложения углов» (см. рис. 108)

$$\sin \widehat{ab} \cdot \cos \widehat{bc} + \sin \widehat{bc} \cdot \cos \widehat{ac} = \sin \widehat{ac}. \quad (1-34)$$

Если векторы a и b произвольны, то векторы $a/|a|$ и $b/|b|$ имеют единичную длину, а ориентированный угол между ними тот же, что и между исходными векторами. Таким образом, ориентированный угол между произвольными векторами a и b вычисляется по формуле

$$\cos \widehat{ab} = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|}, \quad \sin \widehat{ab} = \frac{\det(a, b)}{|a| \cdot |b|}. \quad (1-35)$$

1.6.1. Аналитическое определение угла. В курсе анализа даётся независимое определение тригонометрических функций. А именно, ряд

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \dots = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} z^k$$

от комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$ мажорируется геометрической прогрессией на любом круге $|z| < R$ в \mathbb{C} и, стало быть, абсолютно и равномерно сходится на любом таком круге. Поэтому он корректно задаёт дифференцируемую функцию¹

$$\mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto e^z} \mathbb{C}.$$

Явно перемножая ряды, нетрудно увидеть, что эта функция удовлетворяет тождеству

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \quad (1-36)$$

Тригонометрические функции вещественной переменной $\vartheta \in \mathbb{R}$ определяются через комплексную экспоненту по формулам

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = \sum_{\nu \geq 0} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} \vartheta^{2\nu} = 1 - \frac{1}{2} \vartheta^2 + \frac{1}{24} \vartheta^4 - \dots \\ \sin \vartheta &= \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} = \sum_{\nu \geq 0} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu + 1)!} \vartheta^{2\nu + 1} = \vartheta - \frac{1}{6} \vartheta^3 + \frac{1}{120} \vartheta^5 - \dots \end{aligned} \quad (1-37)$$

Прямо из этих определений и тождества (1-36) вытекают равенства

$$\begin{aligned} \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta &= 1 \\ \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) &= \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \\ \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) &= \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \end{aligned} \quad (1-38)$$

¹замечательную среди прочего тем, что она совпадает со своей производной

Стандартными методами исследования дифференцируемых функций показывается, что отображение $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, заданное формулой

$$\vartheta \longmapsto (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \quad (1-39)$$

монотонно наматывает числовую прямую \mathbb{R} против часовой стрелки на единичную окружность $x^2 + y^2 = 1$ и имеет период 2π .

Это позволяет *определить* ориентированный угол \widehat{ef} между единичными векторами e, f любого евклидова пространства V как единственное вещественное число $\vartheta \in [0, 2\pi)$, переходящее при отображении (1-39) в точку

$$((e, f), \det(e, f)),$$

которая лежит на единичной окружности, поскольку, как мы видели выше,

$$f = (e, f) \cdot e + \det(e, f) \cdot e^\perp$$

$$\text{и } (f, f) = 1 \iff (e, f)^2 + \det^2(e, f) = 1.$$

При таком определении угла утверждение о том, что «углы складываются» по правилу

$$\widehat{ab} + \widehat{bc} = \widehat{ac},$$

становится *теоремой*, и сопоставляя рассуждения вокруг формул (1-33) и (1-34) на стр. 24 со средней формулой в (1-37), мы получаем *доказательство* этой теоремы.

УПРАЖНЕНИЕ 1.14. Если у Вас под рукой имеется какой-нибудь список аксиом школьной евклидовой геометрии, удостоверьтесь, что приведённые в нём аксиомы выполняются на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 со стандартным скалярным произведением (1-25), точки, прямые, углы и расстояния на которой *определяются* так, как это было сделано выше.

УПРАЖНЕНИЕ 1.15. Покажите, что прямая, заданная в координатах (x_1, x_2) относительно какого-нибудь ортонормального базиса в \mathbb{R}^2 уравнением

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = c,$$

перпендикулярна вектору $a = (a_1, a_2)$ и находится от начала координат на расстоянии $|d|/|a|$ по ту же сторону, что и конец вектора a , если $d > 0$, и по другую сторону — если $d < 0$.