

## §2. Многомерные пространства

**2.1. Базисы и размерность.** Рассмотрим векторное пространство  $V$  над полем  $\mathbb{k}$ . Скажем, что вектор  $v \in V$  *линейно выражается*, через векторы  $w_1, w_2, \dots, w_m$ , если

$$v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m$$

для некоторых  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ . Правая часть этой формулы называется *линейной комбинацией* векторов  $w_i \in V$  с коэффициентами  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ .

Набор векторов  $w_1, w_2, \dots, w_m \in V$  называется *порождающим* векторное пространство  $V$ , если каждый вектор  $v \in V$  линейно выражается через векторы  $w_1, w_2, \dots, w_m$ . Векторное пространство, в котором имеется конечный порождающий набор векторов, называется *конечномерным*.

Порождающий набор векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$  называется *базисом* векторного пространства  $V$ , если любой вектор  $v \in V$  линейно выражается через них *единственным* образом, т. е. если из равенства

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

вытекает, что  $x_i = y_i$  для всех  $i$ . Коэффициенты  $x_i$  единственного линейного выражения

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

вектора  $v$  через базисные векторы  $e_\nu$  называются *координатами* вектора  $v$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Ниже, в сл. 2.1, мы покажем, что любое конечномерное векторное пространство  $V$  обладает базисом, причём все базисы состоят из одно и того же числа векторов. Это число называется *размерностью* векторного пространства  $V$  и обозначается  $\dim V$ .

### ПРИМЕР 2.1 (КООРДИНАТНОЕ ПРОСТРАНСТВО $\mathbb{k}^n$ )

Координатное пространство  $\mathbb{k}^n$  является непосредственным обобщением координатной плоскости  $\mathbb{k}^2$ . По определению, векторами пространства  $\mathbb{k}^n$  являются упорядоченные наборы из  $n$  чисел

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{k}$$

(для экономии бумаги мы пишем их в строчку, но часто бывает удобно представлять векторы пространства  $\mathbb{k}^n$  в виде столбцов). Сложение векторов и умножение векторов на числа задаётся правилами

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  с 1 на  $i$ -том месте и нулями в остальных

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \tag{2-1}$$

образуют базис пространства  $\mathbb{K}^n$ , поскольку произвольный вектор

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

линейно выражается через них единственным способом:

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (2-2)$$

Таким образом,  $\dim \mathbb{K}^n = n$ . Базис (2-1) называется *стандартным базисом* координатного пространства  $\mathbb{K}^n$ .

### ПРИМЕР 2.2 (ПРОСТРАНСТВО МАТРИЦ)

Обобщением координатного пространства  $\mathbb{K}^n$  является *пространство матриц*  $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , векторами которого, по определению, являются прямоугольные таблицы из  $m$  строк и  $n$  столбцов, заполненные числами из поля  $\mathbb{K}$ , а сложение векторов и умножение векторов на числа определяется поэлементно: если матрица  $A = (a_{ij})$  имеет в  $i$ -той строке и  $j$ -том столбце элемент  $a_{ij}$ , а матрица  $B = (b_{ij})$  — элемент  $b_{ij}$ , то их линейная комбинация  $\lambda A + \mu B$  с коэффициентами  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , по определению, имеет в  $i$ -той строке и  $j$ -том столбце элемент  $\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$ . Например,

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координатное пространство  $\mathbb{K}^n$  можно воспринимать как пространство  $\text{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{K})$  (матрицы, состоящие из единственной строки) или как пространство  $\text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  (матрицы, состоящие из единственного столбца).

Мы будем обозначать через  $E_{ij}$  матрицу, имеющую единицу в пересечении  $i$ -той строки и  $j$ -того столбца и нули во всех остальных клетках. Матрицы  $E_{ij}$  называются *стандартными базисными матрицами* (или *матричными единицами*) и образуют базис в пространстве матриц, поскольку произвольная матрица  $A = (a_{ij})$  единственным образом линейно выражается через них:

$$A = \sum_{ij} a_{ij} E_{ij}.$$

В частности,  $\dim \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) = mn$ .

**2.1.1. Линейная зависимость.** Векторы  $v_1, v_2, \dots, v_m$  в произвольном векторном пространстве  $V$  называются *линейно независимыми*, если из равенства  $\sum \lambda_i v_i = 0$  вытекает, что все  $\lambda_i = 0$ . Наоборот, если существует конечная линейная комбинация

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0, \quad (2-3)$$

в которой имеются ненулевые коэффициенты  $\lambda_i$ , то векторы  $v_1, v_2, \dots, v_m$  называются *линейно зависимыми*.

Линейная зависимость векторов означает, что любой входящий в неё с ненулевым коэффициентом вектор линейно выражается через остальные. Например, если  $\lambda_m \neq 0$ , то

$$v_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} v_2 - \cdots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} v_{m-1}.$$

Наоборот, любое линейное выражение вида  $v_m = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_{m-1} v_{m-1}$  можно записать в виде линейной зависимости

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_{m-1} v_{m-1} - v_m = 0.$$

### ЛЕММА 2.1

Набор векторов  $\{e_\nu\}$ , порождающий векторное пространство  $V$ , тогда и только тогда является базисом, когда он линейно независим.

**Доказательство.** Если  $\sum \lambda_i e_i = 0$  и не все  $\lambda_i$  нулевые, то любой вектор  $v = \sum x_i e_i$  допускает *другое* выражение  $v = \sum (x_i + \lambda_i) e_i$  через векторы  $e_i$ . Наоборот, если  $v = \sum x_i e_i = \sum y_i e_i$  — два различных представления одного вектора, то переносим правую часть в середину, получаем линейную зависимость  $\sum (x_i - y_i) e_i = 0$ .  $\square$

### ЛЕММА 2.2 (ЛЕММА О ЗАМЕНЕ)

Если векторы  $w_1, w_2, \dots, w_m$  порождают  $V$ , а векторы  $u_1, u_2, \dots, u_k$  линейно независимы, то  $m \geq k$  и векторы  $w_i$  можно перенумеровать так, что набор

$$u_1, u_2, \dots, u_k, w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_m$$

(получающихся заменой первых  $k$  векторов  $w_i$  векторами  $u_i$ ) также будет порождать пространство  $V$ .

**Доказательство.** Пусть  $u_1 = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_m w_m$ . Поскольку  $u_1 \neq 0$  (иначе векторы  $u_i$  линейно зависимы!), среди коэффициентов  $x_i$  есть хоть один ненулевой. Перенумеруем векторы  $w_i$  так, чтобы  $x_1 \neq 0$ . Тогда вектор  $w_1$  линейно выражается через  $u_1$  и  $w_2, \dots, w_m$  по формуле

$$w_1 = \frac{1}{x_1} u_1 - \frac{x_2}{x_1} w_2 - \cdots - \frac{x_m}{x_1} w_m.$$

Следовательно, векторы  $u_1, w_2, w_3, \dots, w_m$  порождают  $V$ .

Далее действуем по индукции. Пусть для очередного  $i$  в пределах  $1 \leq i < k$  векторы  $u_1, u_2, \dots, u_i, w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_m$  порождают  $V$ . Тогда

$$u_{i+1} = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \cdots + y_i u_i + x_{i+1} w_{i+1} + x_{i+2} w_{i+2} + \cdots + x_m w_m. \quad (2-4)$$

Поскольку векторы  $u_\nu$  линейно независимы, вектор  $u_{i+1}$  нельзя линейно выразить только через векторы  $u_1, u_2, \dots, u_i$ , и значит, в разложение (2-4) входит с

ненулевым коэффициентом хотя бы один из оставшихся векторов  $w_j$ . Следовательно,  $m > i$  и мы можем занумеровать оставшиеся  $w_j$  так, чтобы в  $x_{i+1} \neq 0$ . Теперь, как и на первом шагу, вектор  $w_{i+1}$  линейно выражается через векторы

$$u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}, \dots, w_m,$$

и, значит, этот набор порождает  $V$ , что воспроизводит индуктивное предположение.  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 2.1.** Покажите, что векторное пространство  $V$  тогда и только тогда бесконечномерно, когда в нём имеются линейно независимые наборы из сколь угодно большого числа векторов.

**СЛЕДСТВИЕ 2.1 (ТЕОРЕМА О БАЗИСЕ)**

В каждом конечномерном векторном пространстве  $V$  любой порождающий набор векторов содержит в себе некоторый базис, а любой линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса. При этом все базисы состоят из одинакового количества векторов.

**Доказательство.** Пусть пространство  $V$  порождается векторами  $v_1, v_2, \dots, v_m$ . По очереди выкидывая из него те векторы, которые линейно выражаются через остальные, мы в конце концов получим линейно независимый порождающий набор векторов, который по лем. 2.1 является базисом.

Поскольку число векторов в любом линейно независимом наборе не больше, чем в любом порождающем, все базисы состоят из одинакового количества векторов.

Добавляя к произвольно взятому линейно независимому набору векторов вектор, который не выражается через него линейно, мы получаем линейно независимый набор векторов. В силу леммы о замене, повторив эту процедуру не более  $m$  раз, мы придём к линейно независимому набору, порождающему всё пространство, т. е. получим базис.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 2.2**

В  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  всякий линейно независимый набор из  $n$  векторов, а также всякий порождающий набор из  $n$  векторов является базисом.

**Доказательство.** Пусть векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  составляют базис  $V$ , а векторы

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

линейно независимы. По лемме о замене (лем. 2.2) порождающие векторы  $e_i$  можно заменить векторами  $v_i$  так, что набор  $v_1, v_2, \dots, v_n$  останется порождающим. Тем самым, он — базис.

Пусть теперь векторы  $w_1, w_2, \dots, w_n$  порождают  $V$ . Тогда этот набор векторов содержит в себе некоторый базис. По теореме о базисе в нём должно быть ровно  $n$  векторов, т. е. этот базис совпадает со всем набором  $w_1, w_2, \dots, w_n$ .  $\square$

## СЛЕДСТВИЕ 2.3

Всякое  $n$ -мерное векторное пространство  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  изоморфно координатному пространству  $\mathbb{k}^n$ . Множество изоморфизмов между  $V$  и  $\mathbb{k}^n$  взаимно однозначно соответствует множеству базисов в  $V$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если отображение  $F : \mathbb{k}^n \xrightarrow{\sim} V$  является изоморфизмом, то образы  $v_i = F(e_i)$  стандартных базисных векторов  $e_i \in \mathbb{k}^n$  из (2-1) образуют базис пространства  $V$ . Наоборот, для любого базиса  $v_1, v_2, \dots, v_n$  пространства  $V$  отображение  $F : \mathbb{k}^n \longrightarrow V$ , заданное правилом

$$F((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

линейно и биективно (обязательно убедитесь в этом!), т.е. является изоморфизмом, и переводит стандартный базис (2-1) пространства  $\mathbb{k}^n$  в базис  $v_i$  пространства  $V$ .  $\square$

## ПРИМЕР 2.3 (ПРОСТРАНСТВО ФУНКЦИЙ)

Пусть  $X$  — произвольное множество. Множество  $\mathbb{k}^X$  всех функций  $X \xrightarrow{f} \mathbb{k}$  образует векторное пространство относительно поточечного сложения значений функций и умножения их на константы:

$$[f_1 + f_2](x) = f_1(x) + f_2(x), \quad [\lambda f](x) = \lambda \cdot f(x).$$

Если множество  $X$  конечно и состоит из  $n$  элементов

$$X = \{1, 2, \dots, n\},$$

пространство функций  $X \longrightarrow \mathbb{k}$  изоморфно координатному пространству  $\mathbb{k}^n$ : отображение, сопоставляющее функции  $f$  набор её значений во всех точках  $X$

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) = (f(1), f(2), \dots, f(n))$$

линейно и биективно. Обратное отображение  $F = f^{-1} : \mathbb{k}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}^X$  переводит стандартный базисный вектор  $e_i \in \mathbb{k}^n$  в  $\delta$ -функцию  $\delta_i : X \longrightarrow \mathbb{k}$ :

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i \end{cases}$$

## ПРИМЕР 2.4 (ПРОСТРАНСТВО ПОДМНОЖЕСТВ)

Если в предыдущем примере взять в качестве  $\mathbb{k}$  поле  $\mathbb{F}_2$ , состоящее из двух элементов<sup>1</sup> 0, 1 и сопоставить каждому подмножеству  $Z \subset X$  его *характеристическую функцию*  $\chi_Z : X \longrightarrow \mathbb{F}_2$ , принимающую значение 1 всюду на  $Z$  и значение 0 всюду на  $X \setminus Z$ , мы получим взаимно однозначное соответствие между пространством функций и множеством всех подмножеств в  $X$ . Эта биекция наделяет множество подмножеств структурой векторного пространства над полем  $\mathbb{F}_2$ , изоморфного пространству функций  $X \longrightarrow \mathbb{F}_2$ .

<sup>1</sup>в котором  $0 + 1 = 1 \cdot 1 = 1$ , а все остальные суммы и произведения нулевые (включая  $1 + 1 = 0$ )

## ПРИМЕР 2.5 (ПРОСТРАНСТВО МНОГОЧЛЕНОВ)

Многочлены с коэффициентами в поле  $\mathbb{k}$  образуют векторное пространство над  $\mathbb{k}$  относительно операций сложения многочленов и умножения их на константы. Пространство многочленов обозначается через  $\mathbb{k}[x]$ . Счётный набор мономов  $1, x, x^2, \dots$  является базисом векторного пространства многочленов  $\mathbb{k}[x]$ , поскольку каждый многочлен, по определению, представляет собою конечную линейную комбинацию таких мономов, и равенство двух многочленов, по определению, означает равенство их коэффициентов.

Многочлены степени не выше  $n$  образуют в  $\mathbb{k}[x]$  векторное подпространство, которое мы будем обозначать  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ . Первые  $n + 1$  мономов  $1, x, x^2, \dots, x^n$  образуют в  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$  базис.

УПРАЖНЕНИЕ 2.2. Покажите, что любой набор многочленов  $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{k}[x]$ , в котором  $\deg f_m = m$  и каждый  $f_m = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$  имеет ненулевой старший коэффициент  $a_0$ , является базисом векторного пространства  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$  многочленов степени не выше  $n$ .

Отметим, что в пространстве формальных степенных рядов  $\mathbb{k}[[x]]$  счётный набор мономов  $1, x, x^2, \dots$  базисом *не является*, поскольку ряд с бесконечным числом ненулевых коэффициентов не является *конечной* линейной комбинацией мономов.

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Покажите, что в  $\mathbb{k}[[x]]$  нет счётного базиса.

## ПРИМЕР 2.6 (ПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ)

Линейные отображения

$$U \xrightarrow{F} W$$

между двумя векторными пространствами  $U$  и  $W$  над полем  $\mathbb{k}$  образуют векторное пространство относительно операций поточечного сложения значений и умножения их на числа

$$F + G : v \mapsto F(v) + G(v) \quad \text{и} \quad \lambda F : v \mapsto \lambda \cdot F(v).$$

Это пространство обозначается через  $\text{Hom}(U, W)$  (или  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, W)$ , если важно подчеркнуть, над каким основным полем рассматриваются пространства).

Если пространства  $U$  и  $W$  конечномерны, то выбирая в них базисы

$$u_1, u_2, \dots, u_n \in U \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots, w_m \in W,$$

мы можем сопоставить каждому линейному отображению  $F : U \longrightarrow W$  матрицу

$$F_{wu} = (f_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n},$$

в  $j$ -том столбце которой стоят коэффициенты разложения вектора  $F(u_j)$  по базису  $w_1, w_2, \dots, w_m \in W$ :

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot f_{ij} \in W \tag{2-5}$$

Получающаяся таким образом матрица

$$F_{wu} = (F(u_1), F(u_2), \dots, F(u_n)) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

называется *матрицей оператора  $F$  в базисах*

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{и} \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_m).$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Убедитесь, что при сложении линейных отображений и умножении линейных отображений на числа их матрицы (в зафиксированных базисах) складываются и умножаются на числа.

Таким образом, сопоставляя линейному отображению его матрицу в выбранных базисах, мы получаем линейное отображение

$$\text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, W) \xrightarrow{F \mapsto F_{wu}} \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k}) \quad (2-7)$$

(подчеркнём, что это отображение *зависит* от выбора базисов  $u$  и  $w$ ).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1

При любом выборе базисов  $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$  и  $w_1, w_2, \dots, w_m \in W$  линейное отображение (2-7) является изоморфизмом векторных пространств. В частности,  $\dim \text{Hom}(U, W) = \dim U \cdot \dim W$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица  $F_{wu} = (f_{ij})$  однозначно определяет оператор  $F$ , поскольку в силу линейности  $F$  его действие на произвольный вектор  $v = \sum u_j x_j$  однозначно задаётся тем, как  $F$  действует на базис пространства  $U$ :

$$F(v) = F\left(\sum_{j=1}^n u_j x_j\right) = \sum_{j=1}^n F(u_j) \cdot x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_i f_{ij} x_j. \quad (2-8)$$

Таким образом, отображение (2-7) инъективно. С другой стороны, для произвольной матрицы  $(f_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$  можно *определить* отображение

$$F : U \longrightarrow W$$

формулой (2-8).

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Убедитесь, что заданное таким способом отображение  $F$  линейно, а его матрица в базисах  $u$  и  $w$  совпадает с матрицей  $(f_{ij})$ .

Таким образом, отображение (2-7) сюръективно. □

**2.2. Подпространства.** Пересечение любого семейства подпространств произвольного векторного пространства  $V$  тоже является подпространством в  $V$ .

Пересечение всех подпространств, содержащих заданное множество векторов  $M \subset V$ , называется *линейной оболочкой* множества  $M$  и обозначается

$$\text{span}(M) = \bigcap_{M \subset U \subset V} U. \quad (2-9)$$

Это наименьшее по включению векторное подпространство в  $V$ , содержащее  $M$ . Иначе его можно описать как множество всех конечных линейных комбинаций векторов из  $M$ . В самом деле, такие линейные комбинации составляют векторное подпространство в  $V$ , которое содержится в любом подпространстве, содержащем  $M$ .

**2.2.1. Сумма подпространств.** Объединение подпространств, как правило, подпространством не является. Например многочлены вида  $ax^2$  и многочлены вида  $bx$  образуют два одномерных подпространства в пространстве многочленов, но сумма  $x^2 + x$  не лежит в их объединении.

УПРАЖНЕНИЕ 2.6. Покажите, что объединение двух подпространств является подпространством только когда одно из подпространств содержится в другом.

Линейная оболочка объединения  $\bigcup_{\nu} U_{\nu}$  заданного набора подпространств  $U_{\nu} \subset V$  называется *суммой* подпространств  $U_{\nu}$  и обозначается  $\sum U_{\nu}$ . Таким образом, сумма подпространств состоит из всевозможных конечных сумм векторов, принадлежащих этим подпространствам. Например,

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \\ U_1 + U_2 + U_3 &= \{u_1 + u_2 + u_3 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3\} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1

Подпространства  $U_1, U_2 \subset V$  называются *транскверсальными*, если их пересечение нулевое:  $U_1 \cap U_2 = 0$ . Сумма транскверсальных подпространств называется *прямой суммой* и обозначается  $U_1 \oplus U_2$ . Транскверсальные подпространства  $U_1, U_2 \subset V$ , такие что  $U_1 \oplus U_2 = V$ , называются *дополнительными*.

#### ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2

Подпространства  $U_1, U_2 \subset V$  транскверсальны тогда и только тогда, когда любой вектор  $w \in U_1 + U_2$  имеет *единственное* представление в виде  $w = u_1 + u_2$  с  $u_1 \in U_1$  и  $u_2 \in U_2$ .

Доказательство. Если  $U_1 \cap U_2 \ni u \neq 0$ , то нулевой вектор  $0 \in U_1 + U_2$  имеет как минимум два разложения в виде  $w = u_1 + u_2$  с  $u_1 \in U_1$  и  $u_2 \in U_2$ : можно взять  $u_1 = u_2 = 0$ , а можно взять  $u_1 = u$ ,  $u_2 = -u$ . Если же  $U_1 \cap U_2 = 0$ , то из равенства  $u'_1 + u'_2 = u''_1 + u''_2$ , в котором  $u'_1, u''_1 \in U_1$  и  $u'_2, u''_2 \in U_2$ , следует равенство  $u'_1 - u''_1 = u''_2 - u'_2$ , левая часть которого лежит в  $U_1$ , а правая — в  $U_2$ . Поэтому вектор  $u'_1 - u''_1 = u''_2 - u'_2$  лежит в  $U_1 \cap U_2 = 0$  и, стало быть, равен нулю, т. е.  $u'_1 = u''_1$  и  $u'_2 = u''_2$ .  $\square$



**2.2.2. Прямые суммы наборов подпространств.** Более общим образом, сумма подпространств  $U_1, U_2, \dots, U_n \subset V$  называется *прямой* и обозначается  $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$ , если каждый вектор  $w \in U_1 + U_2 + \dots + U_n$  имеет единственное представление в виде  $w = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  с  $u_i \in U_i$ .

Например, если векторы  $\{e_i\}$  образуют базис пространства  $V$ , то  $V$  является прямой суммой одномерных подпространств, порождённых векторами  $e_i$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.7.** Покажите, что для того, чтобы сумма подпространств  $U_i$  была прямой, необходимо и достаточно, чтобы каждое из подпространств  $U_i$  было трансверсально сумме остальных подпространств.

Иначе можно сказать, что сумма подпространств  $U_1, U_2, \dots, U_m \subset V$  является прямой тогда и только тогда, когда любой набор ненулевых векторов  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , в котором  $u_i \in U_i$ , линейно независим.

**2.2.3. Размерность суммы и пересечения.** Из теоремы о базисе вытекает, что базис любого подпространства  $U \subset V$  можно дополнить до базиса во всём пространстве, откуда, в частности, следует, что любое подпространство  $U$  в конечномерном пространстве  $V$  тоже конечномерно, и  $\dim U \leq \dim V$ .

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2

Для подпространства  $U$  конечномерного пространства  $V$  разность размерностей

$$\text{codim } U \stackrel{\text{def}}{=} \dim V - \dim U$$

называется *коразмерностью* подпространства  $U$  в  $V$ .

#### ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3

Для любых двух конечномерных подпространств  $U_1, U_2$  произвольного векторного пространства  $V$   $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2)$ .

**Доказательство.** Выберем какой-нибудь базис  $u_1, u_2, \dots, u_k$  в  $U_1 \cap U_2$  и дополним его векторами  $v_1, v_2, \dots, v_r$  и  $w_1, w_2, \dots, w_s$  до базисов в подпространствах  $U_1$  и  $U_2$  соответственно. Достаточно показать, что векторы

$$u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots, w_s$$

образуют базис пространства  $U_1 + U_2$ . Ясно, что они его порождают. Допустим, что они линейно зависимы. Поскольку каждый из наборов  $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r$  и  $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_s$  в отдельности линейно независим, в линейной зависимости

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r + \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \dots + \eta_s w_s = 0$$

присутствуют как векторы  $v_i$ , так и векторы  $w_j$ . Переносим в одну часть все векторы  $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_r$ , а в другую — все векторы  $w_1, w_2, \dots, w_s$ , получаем равенство между вектором из  $U_1$  и вектором из  $U_2$ , означающее, что этот вектор лежит в пересечении  $U_1 \cap U_2$ . Но тогда в его разложении по базисам пространств  $U_1$  и  $U_2$  нет векторов  $v_i$  и  $w_j$  — противоречие.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 2.4**

Для любых подпространств  $U_1, U_2$  конечномерного векторного пространства  $V$  выполняется неравенство  $\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(V)$ . В частности,  $U_1 \cap U_2 \neq 0$  при  $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim V$ .

Доказательство. Это вытекает из неравенства  $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim V$  и предыдущего предл. 2.3.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 2.5**

Трансверсальные векторные подпространства  $U_1, U_2$  конечномерного векторного пространства  $V$  дополняют друг друга тогда и только тогда, когда

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V).$$

Доказательство. Поскольку  $U_1 \cap U_2 = 0$ , написанное равенство равносильно равенству  $\dim(U_1 + U_2) = \dim V$ , означающему, что  $U_1 + U_2 = V$ .  $\square$

**2.3. Линейные отображения.** Со всяким линейным отображением векторных пространств

$$F : V \longrightarrow W$$

можно связать два подпространства: подпространство  $\operatorname{im} F \subset W$ , которое называется *образом*  $F$  и определяется как

$$\operatorname{im} F \stackrel{\text{def}}{=} F(V) = \{w \in W \mid \exists v \in V : F(v) = w\},$$

и подпространство  $\ker F \subset V$ , которое называется *ядром*  $F$  и определяется как

$$\ker F = F^{-1}(0) = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.8. Убедитесь, что оба множества  $\ker F$  и  $\operatorname{im} F$  действительно являются векторными подпространствами.

Два вектора  $v_1, v_2 \in V$  тогда и только тогда переводятся отображением  $F$  в один и тот же вектор  $w = F(v_1) = F(v_2) \in \operatorname{im} F$ , когда  $v_1 - v_2 \in \ker F$ . В самом деле, в силу линейности  $F$

$$F(v_1) = F(v_2) \iff F(v_1 - v_2) = 0.$$

Таким образом, полный прообраз любого вектора  $w \in \operatorname{im} F$  является *параллельным сдвигом* векторного подпространства  $\ker F$ , т. е. имеет вид  $v + \ker F$ , где  $v$  — произвольным образом фиксированный вектор, отображающийся в  $w$ . В частности, мы получаем такое

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4**

Линейное отображение инъективно тогда и только тогда, когда его ядро — нулевое.  $\square$

Уточнением этого факта является

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5**

Для любого линейного отображения  $F : V \longrightarrow W$  из конечномерного векторного пространства  $V$  выполнено равенство

$$\dim \ker F + \dim \operatorname{im} F = \dim V. \quad (2-10)$$

**Доказательство.** Выберем базис  $u_1, u_2, \dots, u_k$  в  $\ker F$  и дополним его векторами  $e_1, e_2, \dots, e_m$  до базиса всего пространства  $V$ . Достаточно показать, что векторы  $F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_m)$  составляют базис в  $\operatorname{im} F$ . Они порождают образ, поскольку для любого  $v = \sum y_i u_i + \sum x_j e_j$  имеем

$$F(v) = \sum y_i F(u_i) + \sum x_j F(e_j) = \sum x_j F(e_j).$$

Они линейно независимы, поскольку из равенства  $0 = \sum \lambda_i F(e_i) = F(\sum \lambda_i e_i)$  вытекает, что  $\sum \lambda_i e_i \in \ker F$  является линейной комбинацией векторов  $u_i$ , что возможно только если все  $\lambda_i = 0$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 2.6**

Следующие свойства линейного отображения  $F : V \longrightarrow V$  из пространства  $V$  в себя эквивалентны друг другу:

$$(1) F \text{ изоморфизм} \quad (2) \ker F = 0 \quad (3) \operatorname{im} F = V.$$

**Доказательство.** Свойства (2) и (3) равносильны друг другу по предл. 2.5, а их одновременное выполнение равносильно (1) по предл. 2.4.  $\square$

**2.4. Двойственное пространство.** Линейное отображение  $\xi : V \longrightarrow \mathbb{k}$  из векторного пространства над полем  $\mathbb{k}$  в само это поле (рассматриваемое как одномерное векторное пространство над собой) называется *линейным функционалом* (а также *линейной формой* или *ковектором*) на пространстве  $V$ .

Ковекторы образуют векторное пространство, которое обозначается

$$V^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$$

и называется *двойственным* (или *сопряжённым*) к  $V$  пространством.

**ПРИМЕР 2.7 (ФУНКЦИОНАЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ)**

Пусть  $X$  — произвольное множество, и  $V = \mathbb{k}^X$  — пространство всех функций на  $X$  со значениями в поле  $\mathbb{k}$ , как в прим. 2.3 на стр. 31. С каждой точкой  $p \in X$  связан *функционал вычисления*<sup>1</sup>

$$\operatorname{ev}_p : \mathbb{k}^X \xrightarrow{f \mapsto f(p)} \mathbb{k},$$

переводящий каждую функцию  $f : X \longrightarrow \mathbb{k}$  в её значение в точке  $p \in X$ .

<sup>1</sup>от «evaluation at  $p$ »

УПРАЖНЕНИЕ 2.9. Убедитесь, что отображение  $ev_p$  линейно, и покажите, что для конечного множества  $X$  функционалы вычисления  $ev_p$ , где  $p$  пробегает  $X$ , составляют базис пространства, двойственного к пространству функций на  $X$ .

ПРИМЕР 2.8 (КООРДИНАТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ)

Каждому базису  $\{e_i\}$  пространства  $V$  отвечает набор *координатных функционалов*  $e_i^* \in V^*$ . Функционал  $e_i^*$  сопоставляет вектору  $v = \sum x_i e_i \in V$  значение  $i$ -той координаты этого вектора:

$$e_i^*(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) = x_i.$$

В частности, значение функционала  $e_i^*$  на базисных векторах  $e_j$  суть

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i \end{cases} \quad (2-11)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.10. Убедитесь, что все отображения  $e_i^* : V \rightarrow \mathbb{k}$  линейны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6

Координатные функционалы любого базиса пространства  $V$  линейно независимы в  $V^*$ . Если пространство  $V$  конечномерно, то они составляют базис пространства  $V^*$ . В частности,  $\dim V = \dim V^*$ .

Доказательство. Пусть в  $V^*$  имеется конечная линейная комбинация

$$\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \cdots + \lambda_N e_N^* = 0.$$

Вычисляя обе части на базисном векторе  $e_i$ , получаем, что  $\lambda_i = 0$ . И так для каждого  $i$ . Для доказательства второго утверждения достаточно проверить, что каждый функционал  $\varphi$  на конечномерном векторном пространстве линейно выражается через функционалы  $e_i^*$ . Это действительно так: если векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  составляют базис в  $V$ , то  $\varphi = \varphi(e_1) e_1^* + \varphi(e_2) e_2^* + \cdots + \varphi(e_n) e_n^*$ . В самом деле, формы, стоящие в левой и правой частях этого равенства, принимают одинаковое значение  $\varphi(e_i)$  на каждом базисном векторе  $e_i$  пространства  $V$ , а значит, в силу своей линейности, и вообще на любом векторе  $v \in V$ .  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3

Базисы  $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in V$  и  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*) \in V^*$  называются *двойственными* базисами конечномерных пространств  $V$  и  $V^*$ .

**2.4.1. Канонический изоморфизм  $V \simeq V^{**}$ .** Конечномерные пространства  $V$  и  $V^*$  играют по отношению друг к другу абсолютно симметричные роли. А именно, каждый вектор  $v \in V$  может рассматриваться как *функционал вычисления* на пространстве  $V^*$

$$ev_v : V^* \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi(v)} \mathbb{k}$$

переводящий линейные формы в их значения на векторе  $v$ . Поскольку число  $\varphi(v) \in \mathbb{k}$  линейно зависит как от  $v$ , так и от  $\varphi$ , сопоставление вектору  $v$  функционала вычисления  $ev_v$  задаёт линейное отображение

$$ev : V \xrightarrow{v \mapsto ev_v} V^{**} \quad (2-12)$$

Подчёркнём, что это отображение не зависит от выбора каких-либо дополнительных данных на пространстве  $V$  (базиса, скалярного произведения и т. п.) или, как ещё говорят, является *каноническим*.

**УПРАЖНЕНИЕ 2.11.** Убедитесь, что отображение (2-12) переводит любой базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  пространства  $V$  в базис пространства  $V^{**}$ , двойственный к базису  $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$  пространства  $V^*$ .

Из этого упражнения вытекает, что отображение (2-12) является *изоморфизмом* и *канонически отождествляет* пространства  $V$  и  $V^{**}$ . Это означает, что каждая линейная форма  $\Phi : V^* \rightarrow \mathbb{k}$  является функционалом вычисления на вполне определённом векторе  $v \in V$ , однозначно определяемым формой  $\Phi$ , а любой базис  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  пространства  $V^*$  является набором координатных форм  $e_i^*$  для единственного базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$  (а именно, для двойственного к  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  базиса в  $V^{**} = V$ ).

**УПРАЖНЕНИЕ 2.12.** Пусть  $\dim V = n$  и наборы векторов  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  и форм  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in V^*$  таковы, что  $\varphi_i(v_i) = 1$  и  $\varphi_i(v_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Покажите, что  
а) оба набора являются базисами  
б) любой вектор  $v$  выражается через векторы  $v_i$  с коэффициентами  $\varphi_i(v)$ .

**ПРИМЕР 2.9 (ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА)**

Зафиксируем  $m + 1$  различных чисел  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{k}$  и рассмотрим на пространстве  $\mathbb{k}[x]_{\leq m}$  многочленов степени не выше  $m$  функционалы вычисления

$$\varphi_i = ev_{a_i} : \mathbb{k}[x]_{\leq m} \xrightarrow{f \mapsto f(a_i)} \mathbb{k},$$

сопоставляющие многочлену  $f$  его значения в точках  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{k}$ . Многочлен

$$f_i(x) = \prod_{\nu \neq i} (x - a_\nu)$$

имеет степень  $m$  и обращается в нуль во всех точках  $a_\nu$ , кроме точки  $a_i$ , а его значение в точке  $a_i$  отлично от нуля. Поэтому многочлены

$$v_i(x) = \frac{1}{f_i(a_i)} \cdot f_i(x)$$

и формы  $\varphi_i$  удовлетворяют условию упр. 2.12 и, тем самым, являются двойственными друг другу базисами, причём разложение произвольного многочлена  $g(x) \in \mathbb{k}[x]_{\leq m}$  по базису  $v_0, v_1, \dots, v_m$  имеет вид

$$g(x) = \sum_{i=0}^m g(a_i) \cdot v_i(x) = \sum_{i=0}^m \frac{\prod_{\nu \neq i} (x - a_\nu)}{\prod_{\nu \neq i} (a_i - a_\nu)} \cdot g(a_i) \quad (2-13)$$

(произведения берутся по всем значениям  $\nu$ , отличным от  $i$ ). Из сказанного вытекает, в частности, что для любого наперёд заданного набора значений  $g_0, g_1, \dots, g_m \in \mathbb{k}$  существует единственный многочлен  $g$ , степени не выше  $m$ , такой что  $g(a_i) = g_i \forall i$ . Этот многочлен явно задаётся формулой (2-13). Формула (2-13) называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

#### ПРИМЕР 2.10 (ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА)

Пусть поле  $\mathbb{k}$  имеет характеристику нуль<sup>1</sup>. Рассмотрим на пространстве  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$  многочленов степени не выше  $n$  функционалы

$$\delta_a^{(0)}, \delta_a^{(1)}, \dots, \delta_a^{(n)},$$

сопоставляющие многочлену  $f$  значения его производных в точке  $a \in \mathbb{k}$ :

$$f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a).$$

Многочлены  $(x-a)^k/k!$  (где  $k = 0, 1, \dots, n$ ) и формы  $\delta_a^{(i)}$  удовлетворяют условию упр. 2.12 и, тем самым, являются двойственными друг другу базами. В частности, произвольный многочлен  $g(x) \in \mathbb{k}[x]_{\leq n}$  обладает разложением

$$g(x) = g(a) \cdot 1 + g'(a) \cdot (x-a) + g''(a) \cdot (x-a)^2/2 + \dots + g^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n/n!. \quad (2-14)$$

Это разложение называется *разложением Тэйлора*<sup>2</sup> многочлена  $g$  в точке  $a$ .

**2.5. Задание подпространств линейными уравнениями.** Ядро  $\ker \xi$  линейной формы  $\xi : V \longrightarrow \mathbb{k}$  чаще называют *аннулятором* этой формы и обозначают

$$\text{Ann } \xi = \ker \xi = \{v \in V \mid \xi(v) = 0\}$$

Поскольку образ любой ненулевой формы  $\xi$  совпадает со всем полем  $\mathbb{k}$ , из предл. 2.5 вытекает, что аннулятор ненулевой формы является векторным подпространством коразмерности 1 в  $V$ . Такие подпространства называются (векторными) *гиперплоскостями*.

Например, множество многочленов степени не выше  $n$ , имеющих заданный корень  $a \in \mathbb{k}$ , образует  $n$ -мерное векторное подпространство в пространстве  $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$  всех многочленов степени не выше  $n$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1** Убедиться в том, что  $\dim \text{Ann}(\xi) = \dim V - 1$ , нетрудно и без предл. 2.5. В самом деле, если  $\xi \neq 0$ , в  $V$  имеется вектор  $v$ , такой что  $\xi(v) \neq 0$  отлично от нуля. Обозначим через  $\mathbb{k} \cdot v \subset V$  одномерное подпространство,

<sup>1</sup>Это означает, что сумма конечного числа единиц поля  $\mathbb{k}$  никогда не равна нулю или, эквивалентно, что наименьшее подполе в  $\mathbb{k}$ , содержащее 0 и 1, изоморфно полю  $\mathbb{Q}$

<sup>2</sup>обратите внимание, что для многочленов разложение Тэйлора является *точным* равенством

порождённое вектором  $V$ . Это подпространство очевидно трансверсально к  $\text{Ann}(\xi)$ , и  $\text{Ann}(\xi) \oplus \mathbb{k} \cdot v = V$ , т. к. любой вектор  $w \in V$  представляется в виде

$$w = u + \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v, \quad \text{где} \quad u = w - \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v \in \text{Ann}(\xi).$$

**УПРАЖНЕНИЕ 2.13.** Проверьте, что  $u \in \text{Ann}(\xi)$ .

**2.5.1. Системы линейных однородных уравнений.** Для любого множества линейных форм  $M \subset V^*$  положим

$$\text{Ann}(M) = \{v \in V \mid \xi(v) = 0 \quad \forall \xi \in M\} \subset V.$$

Иначе  $M$  можно воспринимать как множество *однородных линейных уравнений*

$$\xi(x) = 0, \quad \text{где } \xi \text{ пробегает } M \subset V^*,$$

на неизвестный вектор  $x \in V$ , и тогда  $\text{Ann}(M)$  есть множество решений этой системы уравнений.

Будучи пересечением гиперплоскостей,  $\text{Ann}(M)$  является векторным подпространством в  $V$ . Тем самым, множество решений любой (в том числе и бесконечной) системы линейных однородных уравнений — это векторное подпространство в  $V$ .

Двойственным образом, для любого множества векторов  $N \subset V$  положим

$$\text{Ann}(N) = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in N\} \subset V^*$$

Иначе говоря,  $\text{Ann}(N)$  представляет собою множество всех линейных уравнений  $\xi(x) = 0$ , решение которых содержит множество  $N$ , т. е. множество всех проходящих через  $N$  гиперплоскостей.

**УПРАЖНЕНИЕ 2.14.** Убедитесь, что аннулятор любого множества векторов  $N \subset V$  является векторным подпространством в  $V^*$  и совпадает с аннулятором линейной оболочки множества  $N$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7**

Для любого подпространства  $U \subset V$   $\dim U + \dim \text{Ann} U = \dim V$ .

**Доказательство.** Выберем базис  $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$  и дополним его векторами  $w_1, w_2, \dots, w_m$  до базиса в  $V$  (таким образом,  $\dim V = k + m$ ). Обозначим через

$$u_1^*, u_2^*, \dots, u_k^*, w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^* \in V^*$$

двойственный базис. Тогда  $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^* \in \text{Ann} U$ , поскольку для любого

$$v = \sum x_i u_i \in U$$

имеем:  $w_\nu^*(v) = w_\nu^*(\sum x_i u_i) = \sum x_i \cdot w_\nu^*(u_i) = 0$ . Если ковектор

$$\varphi = \sum y_i u_i^* + \sum z_j w_j^* \in \text{Ann}(U),$$

то все его координаты  $y_i = \varphi(u_i) = 0$ . Поэтому  $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*$  линейно порождают  $\text{Ann}(U)$ . Так как они линейно независимы, они составляют в  $\text{Ann}(U)$  базис. Тем самым,  $\dim \text{Ann}(U) = m = \dim V - \dim U$ .  $\square$

### СЛЕДСТВИЕ 2.7

Для любого подпространства  $U \subset V$   $\text{Ann Ann}(U) = U$ .

Доказательство.  $U \subset \text{Ann Ann}(U)$  и по предл. 2.7  $\dim \text{Ann Ann} U = \dim U$ .  $\square$

### СЛЕДСТВИЕ 2.8

Для любого подпространства  $U \subset V^*$  тоже выполняются равенства

$$\dim U + \dim \text{Ann} U = \dim V \quad \text{и} \quad \text{Ann Ann}(U) = U.$$

Доказательство. Применим предыдущее предложение и следствие из него, взяв в качестве  $V$  двойственное пространство  $V^*$ , и воспользуемся каноническим отождествлением  $V^{**}$  с  $V$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2** На языке линейных уравнений предыдущие факты означают, что каждое подпространство коразмерности  $m$  в  $V$  можно задать системой из  $m$  линейно независимых линейных уравнений, и наоборот, множество решений всякой системы из  $m$  линейно независимых уравнений на пространстве  $V$  представляет собою векторное подпространство коразмерности  $m$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.15.** Покажите, что для любого множества векторов  $N \subset V$

$$\text{Ann Ann} N = \text{span} N.$$

### ТЕОРЕМА 2.1

Соответствие  $U \longleftrightarrow \text{Ann}(U)$  устанавливает биекцию между подпространствами двойственных пространств  $V$  и  $V^*$ . Эта биекция оборачивает включения:

$$U \subset W \iff \text{Ann} U \supset \text{Ann} W$$

и переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы.

Доказательство. Обозначим через  $\mathcal{S}(V)$  множество всех подпространств векторного пространства  $V$ . Равенство  $\text{Ann Ann}(U) = U$  означает, что два отображения, сопоставление подпространству его аннулятор в двойственном пространстве:

$$\mathcal{S}(V) \begin{array}{c} \xrightarrow{U \rightarrow \text{Ann} U} \\ \xleftarrow{\text{Ann} W \leftarrow W} \end{array} \mathcal{S}(V^*)$$



обратны друг другу, и следовательно, биективны. Далее, очевидно, что

$$U \subset W \quad \Rightarrow \quad \text{Ann } U \supset \text{Ann } W .$$

Если применить эту импликацию, взяв в качестве подпространств  $U$  и  $W$  подпространства  $\text{Ann } W$  и  $\text{Ann } U$  соответственно, и воспользоваться равенствами  $U = \text{Ann } \text{Ann } U$  и  $W = \text{Ann } \text{Ann } W$ , то мы получим обратную импликацию

$$\text{Ann } U \supset \text{Ann } W \quad \Rightarrow \quad U \subset W .$$

Далее, равенство

$$\bigcap_{\nu} \text{Ann } (U_{\nu}) = \text{Ann } \left( \sum_{\nu} U_{\nu} \right) \quad (2-15)$$

вытекает из того, что любая линейная форма, зануляющаяся на каждом из подпространств  $U_{\nu}$ , зануляется и на их линейной оболочке, а форма, зануляющаяся на сумме подпространств, зануляется и на каждом из них в отдельности.

Для доказательства равенства

$$\text{Ann } \left( \bigcap_{\nu} W_{\nu} \right) = \sum_{\nu} \text{Ann } (W_{\nu})$$

возьмём в (2-15) в качестве подпространств  $U_{\nu}$  пространства  $\text{Ann } W_{\nu}$ , а затем, в получившемся равенстве, возьмём аннуляторы левой и правой части.  $\square$

**2.6. Аффинные пространства.** Множество  $A$  называется *аффинным*<sup>1</sup> пространством над заданным векторным пространством  $V$ , если с каждому  $v \in V$  сопоставлено преобразование сдвига (или *параллельный перенос*)  $\tau_v : A \longrightarrow A$ , так что выполняются следующие три свойства:

$$1) \tau_0 = \text{Id}_A, \quad 2) \forall v, w \in V \quad \tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w} \quad (2-16)$$

$$3) \forall p, q \in A \exists \text{ единственный } v \in V : \tau_v(p) = q \quad (2-17)$$

Размерностью аффинного пространства  $A$  называется размерность  $\dim V$  векторного пространства  $V$ .

Первые два условия (2-16) означают, что параллельные переносы на всевозможные векторы  $v \in V$  образуют абелеву группу преобразований пространства  $A$ . Отметим, что обратным к преобразованию сдвига  $\tau_v$  на вектор  $v$  является сдвиг  $\tau_{-v}$  на противоположный вектор  $-v$ .

Третье условие (2-17) означает, что любую точку  $q$  можно получить из любой точки  $p$  *единственным* преобразованием сдвига  $\tau_v$ . Задающий этот сдвиг вектор  $v$  обозначается через  $\overrightarrow{pq}$ . Продуктивно представлять его себе как стрелку с началом в точке  $p \in A$  и концом в точке  $q \in A$ . Из (2-16) вытекает, что

$$\overrightarrow{pp} = 0 \quad \text{и} \quad \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr} \quad \forall p, q, r \in A .$$

<sup>1</sup>Это слово является бесхитростной калькой с английского *affine* (ассоциированный)

УПРАЖНЕНИЕ 2.16. Убедитесь, что  $\vec{p}\vec{q} = -\vec{q}\vec{p}$  и что  $\vec{p}\vec{q} = \vec{r}\vec{s} \iff \vec{p}\vec{s} = \vec{q}\vec{r}$ .

Параллельный перенос  $\tau_v$  можно воспринимать как операцию «откладывания» фиксированного вектора  $v \in V$  от всевозможных точек  $p \in A$ , и мы часто будем писать  $p + v$  вместо  $\tau_v(p)$ .

### ПРИМЕР 2.11

Множество всех многочленов степени  $m$  со старшим коэффициентом 1 представляет собою аффинное пространство над векторным пространством  $\mathbb{K}[x]_{\leq(m-1)}$  всех многочленов степени не выше  $m - 1$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.17. Докажите это.

Отметим, что размерность этого аффинного пространства равна  $m$ .

**2.6.1. Аффинизация и векторизация.** Из всякого векторного пространства  $V$  можно изготовить аффинное пространство  $\mathbb{A}(V)$ , точками которого являются «концы радиус векторов»  $v \in V$ , отложенных от «начальной» точки  $0$ , отвечающей нулевому вектору. Говоря формально, точками пространства  $\mathbb{A}(V)$ , по определению, являются векторы пространства  $V$ , а параллельный перенос  $\tau_w : V \longrightarrow V$  переводит  $v$  в  $v + w$ .

Наоборот, если зафиксировать какую-нибудь точку  $p$  в произвольном аффинном пространстве  $A$  над  $V$ , то сопоставление каждой точке  $q \in A$  вектора  $\vec{p}\vec{q} \in V$  устанавливает, согласно (2-17), биекцию между точками из  $A$  и векторами из  $V$ . Эта биекция называется *векторизацией* аффинного пространства  $A$  с *началом* (или с *центром*) в точке  $p \in A$ .

Набор  $p, e_1, e_2, \dots, e_n$ , где  $p \in A$ , а  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — какой-нибудь базис в  $V$ , называется *аффинной системой координат* (или *репером*) в пространстве  $A$ . Коэффициенты разложения вектора  $\vec{p}\vec{q}$  по базису  $e_1, e_2, \dots, e_n$  называются *аффинными координатами* точки  $q$  относительно репера  $p, e_1, e_2, \dots, e_n$ .

**2.6.2. Аффинные подпространства.** Пусть  $A$  является аффинным точечным пространством над векторным пространством  $V$ . Для любой точки  $p \in A$  и любого векторного подпространства  $U \subset V$  множество точек

$$\Pi(p, U) = p + U = \{q = p + u \in A \mid u \text{ пробегает подпространство } U\}$$

называется *аффинным подпространством*. Векторное подпространство  $U$  называется в этом случае *направляющим подпространством* аффинного пространства  $\Pi(p, U)$ , а его размерность  $\dim U$  называется *размерностью* аффинного пространства  $\Pi(p, U)$ .

### ПРИМЕР 2.12 (прямые и плоскости)

Аффинные подпространства  $p + U$ , где  $\dim U = 1, 2$  называются *прямыми* и *плоскостями* соответственно. Таким образом, аффинная прямая представляет собою ГМТ вида

$$p + vt,$$

где  $p$  — некоторая точка,  $v$  — ненулевой вектор, а  $t$  пробегает  $\mathbb{K}$ . Аналогично, аффинная плоскость есть ГМТ вида

$$p + \lambda u + \mu w,$$

где  $p$  — некоторая точка,  $u, w$  — пара непропорциональных векторов, а  $\lambda, \mu$  независимо пробегают  $\mathbb{K}$ .

### Предложение 2.8

Следующие условия на аффинные подпространства  $\Pi(p, U)$  и  $\Pi(q, U)$  с одним и тем же направляющим подпространством  $U \subset V$  равносильны друг другу:

- 1)  $\overrightarrow{pq} \in U$
- 2)  $\Pi(p, U) = \Pi(q, U)$
- 3)  $\Pi(p, U) \cap \Pi(q, U) \neq \emptyset$
- 4)  $p \in \Pi(q, U)$
- 5)  $q \in \Pi(p, U)$ .

**Доказательство.** Покажем, что из (1) следует (2). Если  $\overrightarrow{pq} \in U$ , то любая точка вида  $q + u$  с  $u \in U$  может быть записана в виде  $p + w$  с  $w = \overrightarrow{pq} + u \in U$ , и обратно, любая точка вида  $p + w$  с  $w \in U$  может быть записана в виде  $p + u$  с  $u = w - \overrightarrow{pq} \in U$ . Тем самым,  $\Pi(p, U) = \Pi(q, U)$ .

Если выполнено (2), то тем более выполнены (3), (4), (5), а выполнение условий (4) или (5) автоматически означает выполнение условия (3). Таким образом, для завершения доказательства достаточно проверить, что из (3) вытекает (1).

Пусть точка  $r = p + u' = q + u'' \in \Pi(p, U) \cap \Pi(q, U)$ , где  $u' = \overrightarrow{pr}$  и  $u'' = \overrightarrow{qr}$  лежат в  $U$ . Тогда и  $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq} = u' - u'' \in U$ .  $\square$

### Предложение 2.9

Следующие условия на  $k+1$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_k$  любого аффинного пространства  $A$  над произвольным векторным пространством  $V$  равносильны друг другу:

- 1) точки  $p_0, p_1, \dots, p_k$  не содержатся ни в каком  $(k-1)$ -мерном аффинном подпространстве
- 2) векторы  $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}$  линейно независимы
- 3) через точки  $p_0, p_1, \dots, p_k$  проходит единственное  $k$ -мерное аффинное подпространство

**Доказательство.** Покажем, что (1) равносильно (2). Линейная зависимость  $k$  векторов  $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}$  равносильна тому, что их линейная оболочка имеет размерность не больше  $k-1$ , что в свою очередь означает, что в  $V$  найдётся  $(k-1)$ -мерное векторное подпространство  $U$ , содержащее все векторы  $\overrightarrow{p_0p_i}$ . По предл. 2.8 последнее означает, что  $(k-1)$ -мерное аффинное подпространство  $p_0 + U$  содержит все точки  $p_i$ .

Покажем, что (2) равносильно (3). Линейная независимость  $k$  векторов

$$\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}$$

означает, что их линейная оболочка  $k$ -мерна, и что эти векторы составляют базис в любом содержащем их  $k$ -мерном подпространстве  $U \subset V$ . Стало быть, всякое такое подпространство совпадает с их линейной оболочкой. С другой стороны, по предл. 2.8 прохождение аффинного пространства  $p_0 + U$  через все точки  $p_i$  означает, что все векторы  $\overrightarrow{p_0 p_i}$  содержатся в  $U$ .  $\square$

### Предложение 2.10

Если векторное подпространство  $U \subset V$  представляет собою множество решений системы однородных линейных уравнений  $\xi(x) = 0$ , где  $\xi$  пробегает некоторое подмножество  $M \subset V^*$ , то аффинное подпространство

$$\Pi(p, U) = p + U \subset \mathbb{A}(V)$$

есть множество решений системы неоднородных линейных уравнений вида

$$\xi(x) = \xi(p),$$

где  $\xi$  пробегает то же самое подмножество  $M \subset V^*$ .

Наоборот, всякая система неоднородных линейных уравнений вида

$$\xi(x) = c_\xi$$

на переменную точку  $x \in \mathbb{A}(V)$  (где  $\xi$  пробегает какое-нибудь подмножество  $M \subset V^*$ , а  $c_\xi \in \mathbb{k}$  — некоторые константы) либо несовместна, либо множество её решений представляет собою аффинное подпространство вида  $p + U$ , где  $U = \text{Ann } M \subset V$ , а  $p$  — любое фиксированное решение системы (т.е. такая точка, что  $\xi(p) = c_\xi$  для всех  $\xi \in M$ ).

**Доказательство.** В силу линейности функций  $\xi : V \longrightarrow \mathbb{k}$  уравнения

$$\xi(q) = \xi(p) \quad \text{и} \quad \xi(\overrightarrow{pq}) = 0$$

равносильны друг другу.  $\square$

**2.6.3. Барцентрические координаты.** Рассмотрим в  $n$ -мерном аффинном пространстве  $A_n$ , ассоциированном с векторным пространством  $V$ , произвольный набор из  $n + 1$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , не лежащих ни в какой гиперплоскости. Поместим пространство  $A_n$  в качестве аффинной гиперплоскости в  $(n + 1)$ -мерное аффинное пространство  $A_{n+1}$  и зафиксируем в  $A_{n+1}$  координатный репер с началом в какой-нибудь точке  $q \notin A_n$  и базисными векторами

$$e_0 = \overrightarrow{qp_0}, \quad e_1 = \overrightarrow{qp_1}, \quad e_2 = \overrightarrow{qp_2}, \quad \dots, \quad e_n = \overrightarrow{qp_n}.$$

В координатах  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  относительно этого репера исходное подпространство  $A_n$  задаётся линейным уравнением

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1,$$

и радиус вектор каждой точки  $a \in A_n$  однозначно представляется в виде

$$\vec{qa} = x_0 \vec{qp_0} + x_1 \vec{qp_1} + \dots + x_n \vec{qp_n}. \quad (2-18)$$

Таким образом, каждая точка  $a \in A_n$  единственным образом представляется в виде барицентрической комбинации

$$a = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \quad (2-19)$$

точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$  с весами  $x_0, x_1, \dots, x_n$  с суммой  $\sum x_i = 1$ .

В н° 1.4.1 мы видели, что представления (2-18) и (2-19) не зависят от выбора начальной точки  $q$ . Коэффициенты  $x_0, x_1, \dots, x_n$  представления (2-19) называются *барицентрическими координатами* точки  $a \in A_n$  относительно симплекса

$$p_0, p_1, \dots, p_n.$$

Ниже, в прим. 3.4, мы получим выражения барицентрических координат точки  $a$  через объёмы ориентированных параллелепипедов, натянутых на всевозможные  $n$ -ки векторов из набора

$$a_0 = \vec{ap_0}, \quad a_1 = \vec{ap_1}, \quad a_2 = \vec{ap_2}, \quad \dots, \quad a_n = \vec{ap_n},$$

обобщающие формулы из н° 1.4.3. А именно, мы покажем, что

$$x_i = \frac{\omega(\vec{ap_0}, \dots, \vec{ap_{i-1}}, \vec{ap_{i+1}}, \dots, \vec{ap_n})}{\omega(\vec{ap_0}, \dots, \vec{ap_{i-1}}, \vec{ap_{i+1}}, \dots, \vec{ap_n})},$$

где  $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n)$  означает объём ориентированного  $n$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .