

§6. Топологии, метрики, нормы и выпуклость

6.1. Топологические пространства. Многие определения из анализа сохраняют смысл в очень широком контексте, если формулировать их не на языке неравенств между числами, а на языке окрестностей точек и вложенности таких окрестностей друг в друга. Формализуется это следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1 (ТОПОЛОГИЯ В ТЕРМИНАХ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ)

Топологией на множестве X называется набор подмножеств в X , называемых *открытыми*, такой что

- 1) несобственные подмножества \emptyset и X открыты
- 2) пересечение любых двух открытых множеств открыто
- 3) объединение любого множества открытых множеств открыто.

Множество X вместе с некоторой зафиксированной на нём топологией называется *топологическим пространством*. Подмножество $Z = X \setminus U$, дополнительное к открытому подмножеству U топологического пространства X , называется *замкнутым*. Предыдущее опр. 6.1 можно эквивалентным образом переформулировать в терминах свойств замкнутых подмножеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2 (ТОПОЛОГИЯ В ТЕРМИНАХ ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ)

Топологией на множестве X называется набор подмножеств в X , называемых *замкнутыми*, такой что

- 1) несобственные подмножества \emptyset и X замкнуты
- 2) объединение любых двух замкнутых множеств замкнуто
- 3) пересечение любого множества замкнутых множеств замкнуто

В этой ситуации *открытыми* подмножествами называются дополнения до замкнутых подмножеств.

УПРАЖНЕНИЕ 6.1. Убедитесь, что опр. 6.2 и опр. 6.1 и в самом деле эквивалентны друг другу.

ПРИМЕР 6.1 (ДИСКРЕТНАЯ ТОПОЛОГИЯ)

Если объявить *каждое* подмножество $Y \subset X$ одновременно и открытым и замкнутым, то получится топология, называемая *дискретной*.

ПРИМЕР 6.2 (ТРИВИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ)

Если объявить открытыми ровно два подмножества¹: \emptyset и X , то получится топология, которая называется *тривиальной* (или *антидискретной*).

¹которые автоматически окажутся и единственными двумя замкнутыми подмножествами

ПРИМЕР 6.3 (ФИНИТНЫЕ И СЧЁТНО-ФИНИТНЫЕ ТОПОЛОГИИ)

Если кроме \emptyset и X объявить замкнутыми все конечные (соотв. все конечные или счётные) подмножества $Z \subset X$, то получится топология, которая называется *финитной* (соотв. *счётно-финитной*).

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Убедитесь, что это действительно топологии.

ПРИМЕР 6.4 (ТОПОЛОГИЯ ЗАРИССКОГО)

Пусть $X = \mathbb{A}^n(\mathbb{k})$ — аффинное координатное пространство над произвольным полем \mathbb{k} . Назовём подмножество $Z \subset \mathbb{A}^n$ замкнутым, если оно является множеством решений некоторой (возможно, бесконечной) системы полиномиальных уравнений.

УПРАЖНЕНИЕ 6.3. Покажите, что \emptyset и всё пространство \mathbb{A}^n задаются уравнениями $1 = 0$ и $0 = 0$ соответственно, объединение множества решений системы уравнений $\{f_\nu(x) = 0\}$ и множества решений системы уравнений $\{g_\mu(x) = 0\}$ задаётся системой уравнений $\{f_\nu(x) \cdot g_\mu(x) = 0\}$ (первый множитель пробегает первую систему, второй — вторую), пересечение решений любого множества систем полиномиальных уравнений задаётся системой уравнений, полученной объединением всех этих систем в одну систему.

Описанная только что топология называется *топологией Зарисского*. Отметим, что на аффинной прямой \mathbb{A}^1 топология Зарисского совпадает с финитной топологией из прим. 6.3.

ПРИМЕР 6.5 (СТАНДАРТНАЯ ТОПОЛОГИЯ НА \mathbb{R}^n)

Назовём стандартным ε -кубом с центром в точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ правильный куб с центром в p и рёбрами длины 2ε , идущими вдоль стандартных координатных осей:

$$B_\varepsilon(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i - p_i| \leq \varepsilon \forall i\} \quad (\text{где } \varepsilon > 0). \quad (6-1)$$

Скажем, что множество $U \subset \mathbb{R}^n$ *открыто*, если вместе с каждой точкой $p \in U$ в U лежит и некоторый ε -куб $B_\varepsilon(p)$ с центром в p .

УПРАЖНЕНИЕ 6.4. Докажите, что получится топология.

Эта топология называется *стандартной топологией* на \mathbb{R}^n , или *топологией покоординатной сходимости* (этимология последнего названия прояснится ниже в упр. 6.15 и сл. 6.2).

УПРАЖНЕНИЕ 6.5. Убедитесь, что стандартная топология не зависит от выбора аффинной системы координат¹ в \mathbb{R}^n .

¹т.е. если определить ε -кубы при помощи любой другой аффинной системы координат, то получится тот же самый набор открытых множеств

ПРИМЕР 6.6 (ИНДУЦИРОВАННАЯ ТОПОЛОГИЯ)

На любом подмножестве Y топологического пространства X имеется *индуцированная* с X топология, открытыми (соотв. замкнутыми) подмножествами в которой являются пересечения с Y открытых (соотв. замкнутых) подмножеств из X .

УПРАЖНЕНИЕ 6.6. Убедитесь, что это действительно топология.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3

Говорят, что топология на X , заданная набором открытых множеств \mathcal{U}_1 , *сильнее* (или *тоньше*) топологии, заданной набором открытых множеств \mathcal{U}_2 , если $\mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2$, т. е. если каждое открытое подмножество топологии \mathcal{U}_2 открыто и в топологии \mathcal{U}_1 . В этой ситуации также говорят, что топология \mathcal{U}_2 *слабее* (или *грубее*) топологии \mathcal{U}_1 .

УПРАЖНЕНИЕ 6.7. Покажите, что опр. 6.3 является отношением частичного порядка на множестве всех топологий на данном множестве X , причём дискретная и тривиальная топологии из прим. 6.1 и прим. 6.2 суть абсолютно максимальный (тончайший) и абсолютно минимальный (грубейший) элементы чума топологий.

ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ 6.1 Из определения топологии *не следует*, что одноточечные подмножества $x \in X$ в абстрактном топологическом пространстве X являются замкнутыми. Соответственно, дополнения до точек $X \setminus x$ не обязательно являются открытыми.

6.1.1. Окрестности. Всякое множество W топологического пространства X , содержащее данную точку $p \in X$ вместе с некоторым непустым открытым подмножеством U , содержащим p и содержащимся в W , называется *окрестностью* точки p .

УПРАЖНЕНИЕ 6.8. Покажите, что пересечение двух и объединение любого числа окрестностей данной точки p также являются окрестностями точки p .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1

Множество открыто тогда и только тогда, оно содержит вместе с каждой своей точкой и некоторую её окрестность.

Доказательство. Непустое открытое множество U само и является содержащейся в U окрестностью любой своей точки. Наоборот, если множество Y содержит вместе с каждой своей точкой p некоторую её окрестность W , то беря в W непустое открытое подмножество U_p , такое что $p \in U_p \subset W \subset Y$, заключаем что $Y = \bigcup_p U_p$ является объединением открытых множеств и посему тоже открыто. \square

6.1.2. Базы. Любую топологию на множестве X можно описывать в духе прим. 6.5, определяя открытые множества как всевозможные объединения некоторых *базисных* открытых окрестностей — аналогов ε -кубов из прим. 6.5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4

Подмножество \mathcal{B} в множестве всех открытых множеств данной топологии на X называется *базой* этой топологии, если любая окрестность W любой точки p содержит какое-нибудь содержащее p подмножество $U \in \mathcal{B}$.

Иначе можно сказать, что набор \mathcal{B} открытых множеств данной топологии является её базой, если и только если любое открытое множество является объединением некоторого семейства множеств из набора \mathcal{B} .

УПРАЖНЕНИЕ 6.9. Покажите, что счётное множество *открытых* ε -кубов

$$\mathring{B}_\varepsilon(p) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i - p_i| < \varepsilon \forall i\}$$

с $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ и $p \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ образует базу стандартной топологии на \mathbb{R}^n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2

Набор подмножеств \mathcal{B} множества X тогда и только тогда является базой некоторой топологии на X , когда для любых двух множеств $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ и любой точки $p \in U_1 \cap U_2$ найдётся $W \in \mathcal{B}$, такое что $p \in W \subset U_1 \cap U_2$.

Доказательство. Если \mathcal{B} — база топологии, то открытое в этой топологии подмножество $U_1 \cap U_2$ содержит вместе с каждой своей точкой p и некоторое содержащее p базовое открытое подмножество $W \in \mathcal{B}$.

Наоборот, если набор открытых множеств \mathcal{B} таков, что

$$\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B} \quad \text{и} \quad \forall p \in U_1 \cap U_2 \quad \exists W_p \in \mathcal{B} : p \in W_p \subset U_1 \cap U_2, \quad (6-2)$$

то назовём открытыми в X пустое подмножество \emptyset , всё X и всевозможные объединения множеств из \mathcal{B} . Очевидно, что объединение любого множества открытых множеств открыто. Пересечение $U' \cap U''$ двух открытых множеств

$$U' = \bigcup_{\nu} U'_\nu \quad \text{и} \quad U'' = \bigcup_{\mu} U''_\mu, \quad \text{где } U'_\nu, U''_\mu \in \mathcal{B},$$

является объединением всевозможных множеств вида $U'_\nu \cap U''_\mu$, каждое из которых, в свою очередь, является объединением подмножеств $W_p \in \mathcal{B}$, приходящих из всевозможных точек $p \in U'_\nu \cap U''_\mu$ согласно свойству (6-2). Таким образом, $U' \cap U''$ также открыто, и мы задали на X топологию, для которой \mathcal{B} очевидно является базой. \square

УПРАЖНЕНИЕ 6.10*. Покажите, что базу топологии Зарисского из прим. 6.4 составляют открытые подмножества вида $\mathcal{D}_f = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) \neq 0\}$, где $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — произвольный многочлен, причём любое открытое множество $U \subset \mathbb{A}^n$ является объединением *конечного* числа базовых.

6.1.3. Непрерывность. Отображение топологических пространств

$$f : X \longrightarrow Y$$

называется *непрерывным*, если полный прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого подмножества $U \subset Y$ открыт в X . Это определение согласуется с принятым в анализе: непрерывность f означает, что для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $W \subset Y$ точки $y = f(x)$ найдётся окрестность $U \subset X$ точки x , такая что $f(U) \subset W$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.11. Убедитесь в этом и покажите, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут.

6.1.4. Зоология точек. Условимся называть произвольные подмножества топологического пространства X *фигурами* в этом пространстве.

Точки фигуры Φ , содержащиеся в Φ вместе с некоторой своей окрестностью, называются *внутренними* точками фигуры Φ . Множество всех внутренних точек фигуры Φ обозначается $\overset{\circ}{\Phi}$ и называется *внутренностью* фигуры Φ . Согласно предл. 6.1 внутренность любой фигуры открыта.

УПРАЖНЕНИЕ 6.12. Покажите, что $\overset{\circ}{\Phi}$ представляет собою объединение всех открытых подмножеств пространства X , содержащихся в Φ , и является, таким образом, наибольшим по включению открытым подмножеством в X , содержащимся в Φ .

Внутренние точки дополнения $X \setminus \Phi$ называются *внешними* точками фигуры Φ . Иными словами, точка $p \in X$ является внешней для Φ , если у неё есть окрестность $W \ni p$, не пересекающаяся с Φ . Мы будем обозначать множество внешних точек фигуры Φ через $\check{\Phi}$. Как и внутренность $\overset{\circ}{\Phi}$, внешность $\check{\Phi}$ любой фигуры Φ открыта.

УПРАЖНЕНИЕ 6.13. Покажите, что $\check{\Phi}$ представляет собою объединение всех открытых подмножеств пространства X , не пересекающихся с Φ , и является, таким образом, наибольшим по включению открытым подмножеством в X , не пересекающимся с Φ .

Отметим, что множество внешних точек замкнутой фигуры $\Phi \subset X$ — это в точности открытое дополнение $X \setminus \Phi$ к этой фигуре.

Замкнутое подмножество в X , дополнительное к (открытому) множеству внешних точек фигуры $\Phi \subset X$, называется *замыканием* фигуры Φ и обозначается $\overline{\Phi} = X \setminus \check{\Phi}$. Согласно упр. 6.13 замыкание $\overline{\Phi}$ представляет собою пересечение всех содержащих Φ замкнутых подмножеств пространства X и, тем самым, является наименьшим по включению замкнутым множеством, содержащим Φ . В частности, $\overline{\overline{\Phi}} = \overline{\Phi}$ для любой фигуры $\Phi \subset X$.

Точки пространства X , не являющиеся ни внешними, ни внутренними точками фигуры $\Phi \subset X$, называются *граничными* или *собственными граничными* точками Φ , смотря по тому, принадлежат ли они этой фигуре. Иначе говоря, точка $p \in X$ является граничной для Φ , если любая её окрестность содержит

как точки из Φ , так и точки, не принадлежащие Φ . Множество всех граничных точек Φ обозначается $\partial\Phi$ и называется *границей* фигуры Φ .

Упражнение 6.14. Покажите, что замыкание $\overline{\Phi}$ фигуры Φ представляет собою дизъюнктивное объединение фигуры Φ и множества всех её несобственных граничных точек.

Точка $p \in X$ называется *предельной точкой* фигуры $\Phi \subset X$, если в любой окрестности точки p имеется отличная от p точка фигуры Φ . Таким образом, замыкание $\overline{\Phi}$ фигуры Φ представляет собою (вообще говоря, недизъюнктивное) объединение Φ и множества всех её граничных точек.

Точки фигуры Φ , не являющиеся её предельными точками, называются *изолированными* точками фигуры Φ . Иначе говоря, точка $p \in \Phi$ является изолированной, если у неё есть окрестность, не содержащая никаких точек Φ , кроме самой точки p .

6.1.5. Компактные пространства. Топологическое пространство называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Предложение 6.3

Если пространство X компактно, и отображение $f : X \longrightarrow Y$ непрерывно, то пространство $f(X) \subset Y$ компактно в индуцированной с Y топологии.

Доказательство. Рассмотрим произвольное покрытие $f(X) = \bigcup_{\alpha} (f(X) \cap U_{\alpha})$, где $U_{\alpha} \subset Y$ открыты. Открытые множества $f^{-1}(U_{\alpha}) \subset X$ покрывают пространство X . Из них можно выбрать конечное подпокрытие

$$X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \cup \dots \cup f^{-1}(U_n).$$

Множества $f(X) \cap U_i$ с $1 \leq i \leq n$ образуют конечное покрытие $f(X)$. \square

Предложение 6.4

Пространство X компактно тогда и только тогда, когда любой набор его замкнутых подмножеств, в котором каждый конечный поднабор имеет непустое пересечение, и весь имеет непустое пересечение.

Доказательство. Пусть X компактно, и любой конечный набор в семействе замкнутых подмножеств $Z_{\alpha} \subset X$ имеет непустое пересечение. Если $\bigcap_{\alpha} Z_{\alpha} = \emptyset$, то открытые подмножества $U_{\alpha} = X \setminus Z_{\alpha}$ покрывают X . Выберем среди них конечное покрытие $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n = X$. Тогда $Z_1 \cap Z_2 \cap \dots \cap Z_n = \emptyset$, что невозможно.

Наоборот, пусть выполнено второе условие. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$. Если никакой конечный набор U_1, U_2, \dots, U_n элементов этого покрытия не покрывает X , то в семействе дополнительных замкнутых множеств $Z_{\alpha} = X \setminus U_{\alpha}$ любой конечный поднабор Z_1, Z_2, \dots, Z_n имеет непустое пересечение. Поэтому $\bigcap_{\alpha} Z_{\alpha} \neq \emptyset$, а значит $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \neq X$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5 (ЛЕММА БОЛЬЦАНО – ВЕЙЕРШТРАССА)

Любое бесконечное подмножество компактного пространства имеет в нём хотя одну предельную точку.

Доказательство. Если точка $p \in X$ не является предельной для подмножества $\Phi \subset X$, то у неё есть открытая окрестность U_p , не содержащая никаких точек из Φ , кроме p . Если ни одна точка в X не является предельной для Φ , открытые множества U_p покрывают X . Выбирая из них конечное покрытие, заключаем, что множество Φ конечно. \square

6.1.6. Некоторые предостережения насчёт сходимости. Как и в анализе, точка p топологического пространства X называется *пределом* последовательности¹

$$x : \mathbb{N} \xrightarrow{n \mapsto x_n} X,$$

если любая окрестность точки p содержит все члены последовательности, начиная с некоторого.

УПРАЖНЕНИЕ 6.15. Покажите, что сходимость в стандартной топологии пространства \mathbb{R}^n из прим. 6.5 равносильна покоординатной сходимости, т.е. последовательность $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ сходится к точке $p \in \mathbb{R}^n$, если и только если при каждом $i = 1, 2, \dots, n$ последовательность i -тых координат точек последовательности x сходится в \mathbb{R} к i -той координате точки p .

Говоря о сходимости, следует иметь в виду, что свойства сходящихся последовательностей существенно зависят от используемой топологии и могут быть весьма далеки от известных из анализа теорем о пределах последовательностей вещественных чисел в стандартной топологии. Например, в финитной топологии на \mathbb{R} из прим. 6.3 последовательность $x_n = n$ сходится, причём каждая точка $p \in \mathbb{R}$ является для неё пределом.

Точка p называется *предельной точкой последовательности* $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, если в любой её окрестности содержится бесконечно много членов последовательности. Предельные точки *последовательности* не следует путать с предельными точками *множества значений* этой последовательности. Так, последовательность вещественных чисел $s_n = (-1)^n$ имеет в стандартной топологии ровно две предельные точки, а множество её значений вообще не имеет предельных точек.

Отметим, что в абстрактном топологическом пространстве из того, что точка p является предельной точкой последовательности x_n , не вытекает, вообще говоря, что в этой последовательности имеется подпоследовательность $y_k = x_{n_k}$, для которой p является *пределом*.

¹напомним, что *последовательностью* элементов множества X называется любое отображение $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, и значение этого отображения на числе $n \in \mathbb{N}$ традиционно записывается как $x_n \stackrel{\text{def}}{=} x(n)$

6.2. Метрические пространства. Имеется важный класс топологических пространств, сходимость в которых устроена практически также, как сходимость в стандартной топологии вещественной прямой \mathbb{R} . Эти пространства описываются при помощи следующей конструкции, обобщающей прим. 6.5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.5

Множество X , на котором задана вещественнозначная функция от двух аргументов $\varrho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, обладающая $\forall x, y, z \in X$ свойствами

$$\begin{aligned} \varrho(x, y) &= \varrho(y, x) && \text{(симметричность)} \\ \varrho(x, y) &\geq 0 && \text{(положительность)} \\ \varrho(x, y) = 0 &\iff x = y && \text{(невырожденность)} \\ \varrho(x, z) &\leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) && \text{(неравенство треугольника)} \end{aligned}$$

называется *метрическим пространством*, а функция ϱ называется *метрикой* (или *расстоянием*) на X .

6.2.1. Метрическая топология. В метрическом пространстве X фигура

$$B_\varepsilon(p) = \{q \in X \mid \varrho(p, q) \leq \varepsilon\} \quad (\text{где } \varepsilon > 0) \quad (6-3)$$

называется (замкнутым) ε -шаром с центром в точке $p \in X$. Из неравенства треугольника вытекает, что *открытые ε -шары*

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(p) = \{q \in X \mid \varrho(p, q) < \varepsilon\} \quad (6-4)$$

с положительными $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ составляют базу топологии. В самом деле, если

$$p \in \overset{\circ}{B}_{\varepsilon_1}(q_1) \cap \overset{\circ}{B}_{\varepsilon_2}(q_2),$$

то для любого $\delta < \min(\varepsilon_1 - \varrho(p, q_1), \varepsilon_2 - \varrho(p, q_2))$ и любого x с $\varrho(x, p) < \delta$ имеем при $i = 1, 2$ неравенства $\varrho(x, q_i) \leq \varrho(x, p) + \varrho(p, q_i) < \varepsilon_i - \varrho(p, q_i) + \varrho(p, q_i) = \varepsilon_i$, означающие, что $\overset{\circ}{B}_\delta(p) \subset \overset{\circ}{B}_{\varepsilon_1}(q_1) \cap \overset{\circ}{B}_{\varepsilon_2}(q_2)$.

Топология с базой из открытых шаров (6-4) рационального радиуса называется *метрической топологией* на метрическом пространстве X . Открытыми в метрической топологии являются такие подмножества $U \subset X$, которые вместе с каждой своей точкой содержат некоторый ε -шар с центром в этой точке.

ПРИМЕР 6.7 (ЕВКЛИДОВА МЕТРИКА)

С каждым скалярным произведением (v, w) на \mathbb{R}^n связана *евклидова метрика*, расстояние в которой задаётся евклидовой длиной вектора:

$$\varrho_{\text{еuc}}(p, q) = |\vec{pq}| = \sqrt{(q-p, q-p)}.$$

Симметричность, положительность и невырожденность этой метрики следуют из симметричности и положительности скалярного произведения. Неравенство

треугольника менее очевидно и вытекает из неравенства Коши – Буняковского – Шварца (см. сл. 1.3 на стр. 21). В евклидовой метрике ε -шары — это обычные шары радиуса ε .

ПРИМЕР 6.8 (SUP-МЕТРИКА В \mathbb{R}^n)

Определим на \mathbb{R}^n расстояние между точками как максимум модулей разностей их координат:

$$\varrho_{\text{sup}}(p, q) = \max_{1 \leq i \leq n} |p_i - q_i|.$$

Симметричность, положительность и невырожденность такой метрики очевидны, а неравенство треугольника вытекает из неравенства треугольника на евклидовой прямой: поскольку $|z_i - x_i| \leq |z_i - y_i| + |y_i - x_i|$ при каждом i ,

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{sup}}(x, z) = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - x_i| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} (|z_i - y_i| + |y_i - x_i|) \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - y_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| = \varrho_{\text{sup}}(x, z) + \varrho_{\text{sup}}(x, z) \end{aligned}$$

Отметим, что ε -шарами в полученной метрике являются в точности стандартные ε -кубы из прим. 6.5.

ПРИМЕР 6.9 (SUP-МЕТРИКА В $\mathcal{C}^0([a, b])$)

Этот пример является бесконечномерным обобщением предыдущего. Определим в пространстве $\mathcal{C}^0([a, b])$ непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ метрику формулой

$$\varrho_{\text{sup}}(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

(корректной, т. к. любая непрерывная функция на отрезке ограничена и достигает своего максимального значения). Симметричность, положительность, невырожденность и неравенство треугольника проверяются дословно так же, как и в предыдущем примере. ε -шарами этой метрики являются множества функций, график которых отличается от графика функции, являющейся центром шара, не более, чем на ε .

6.2.2. Отделимость. Из неравенства треугольника вытекает, что любые две различные точки метрического пространства обладают непересекающимися открытыми окрестностями: если $\varrho(p, q) = d$, то

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(p) \cap \overset{\circ}{B}_\varepsilon(q) = \emptyset \quad \text{при } \varepsilon < d/2.$$

Топологические пространства с таким свойством называются *хаусдорфовыми*. Таким образом, каждое метрическое пространство хаусдорфово.

УПРАЖНЕНИЕ 6.16. Покажите, что в хаусдорфовом пространстве никакая последовательность не может иметь более одного предела.

В силу неравенства треугольника никакой шар радиуса $\varepsilon < d/2$ не может содержать одновременно две точки p и q с $\varrho(p, q) = d > 0$. Поэтому в любом метрическом пространстве пересечение любой последовательности вложенных друг в друга замкнутых шаров

$$B_{\varepsilon_1}(p_1) \supset B_{\varepsilon_2}(p_2) \supset B_{\varepsilon_3}(p_3) \supset \dots \quad \text{с } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (6-5)$$

либо пусто, либо состоит из одной точки. В частности, пересечение последовательности шаров $B_{1/n}(p)$ состоит из единственной точки p .

УПРАЖНЕНИЕ 6.17. Покажите, что в метрической топологии все шары $B_\varepsilon(p) = \{q \in X \mid \varrho(p, q) \leq \varepsilon\}$ и все точки замкнуты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.6

Метрическое пространство называется *полным*, если каждая последовательность вложенных замкнутых шаров со стремящимися к нулю радиусами имеет в нём непустое пересечение (автоматически состоящее из единственной точки).

УПРАЖНЕНИЕ 6.18. Покажите, что пространство \mathbb{R}^n с *sup*-метрикой из прим. 6.8 полно.

УПРАЖНЕНИЕ 6.19* (по анализу). Покажите, что пространство $\mathcal{C}^0([a, b])$ непрерывных функций $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ из прим. 6.9 полно.

ТЕОРЕМА 6.1 (СВОЙСТВА МЕТРИЧЕСКИХ КОМПАКТОВ)

Следующие свойства фигуры Φ в полном метрическом пространстве X эквивалентны друг другу:

- 1) из любого покрытия Φ открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие
- 2) любое бесконечное подмножество в Φ имеет в Φ хотя бы одну предельную точку
- 3) Φ замкнута и для любого $\varepsilon > 0$ фигуру Φ можно покрыть конечным множеством ε -шаров.

Доказательство. В предл. 6.5 мы видели, что импликация (1) \Rightarrow (2) выполняется в любом топологическом пространстве.

Докажем импликацию (2) \Rightarrow (3). Пусть точка p является предельной для Φ . Начав с любой точки $x_1 \in \Phi$, для каждого натурального $n \geq 2$ отметим в шаре радиуса $\varrho(p, x_{n-1})/2$ с центром в p какую-нибудь отличную от p точку $x_n \in \Phi$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.20. Проверьте, что во всём объемлющем метрическом пространстве точка p — это единственная предельная точка множества точек $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Согласно (2), $p \in \Phi$, т. е. фигура Φ замкнута. Если для какого-то $\varepsilon > 0$ фигура Φ не покрывается конечным числом ε -шаров, то, начав с любого $y_1 \in \Phi$ и отметив для каждого натурального $k \geq 2$ какую-нибудь точку

$$y_k \in \Phi \setminus (B_\varepsilon(y_1) \cup B_\varepsilon(y_2) \cup \dots \cup B_\varepsilon(y_{k-1})),$$

получим счётное множество точек $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, в котором $\forall n \neq m \rho(y_n, y_m) > \varepsilon$. Поскольку ни в каком шаре радиуса $\varepsilon/3$ не содержится более одной точки y_i , у построенного множества вообще нет предельных точек, что противоречит (2). Следовательно, фигура Φ вполне ограничена.

Докажем импликацию (3) \Rightarrow (1). Пусть открытое покрытие $\Phi = \bigcup_\alpha U_\alpha$ не содержит конечного подпокрытия. Выберем в конечном покрытии фигуры Φ шарами радиуса $1/4$ такой шар A_1 , что пересечение $\Phi \cap A_1 \neq \emptyset$ не покрывается никаким конечным набором множеств U_α . Далее для каждого натурального $n \geq 2$ выберем в конечном покрытии Φ шарами радиуса $1/4^n$ такой шар A_n , что пересечение $A_n \cap (\Phi \cap A_{n-1}) \neq \emptyset$ не покрывается никаким конечным набором множеств U_α . Отметим, что $A_n \cap A_{n-1} \neq \emptyset$, и радиус A_n вчетверо меньше, чем у A_{n-1} . Обозначим через D_n шар с тем же центром, что и A_n , но с вдвое большим радиусом $2/4^n$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.21. Убедитесь, что $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \dots$ и радиусы шаров D_n стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

В силу полноты объемлющего пространства все шары D_n имеют общую точку q . Поскольку любой из стягивающихся к q шаров D_n имеет непустое пересечение с Φ , точка q лежит в $\overline{\Phi} = \Phi$ и покрывается некоторым открытым множеством U из набора U_α . Но тогда все шары A_k , начиная с некоторого, лежат внутри U , а значит, $\Phi \cap A_k$ покрывается одним множеством U , что противоречит выбору шаров A_k . \square

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1 Свойство (1) из теор. 6.1 называется *компактностью*, свойство (2) — *секвенционной компактностью* (или *свойством Больцано–Вейерштрасса*), последнее свойство в (3) называется *вполне ограниченностью*. Из вполне ограниченности следует ограниченность в обычном смысле: если фигура покрывается конечным набором шаров, то она содержится в некотором шаре достаточно большого радиуса. В пространстве \mathbb{R}^n с *sup*-метрикой из прим. 6.8 верно и обратное: всякая ограниченная фигура вполне ограничена, поскольку если Φ содержится в кубе со стороной d , то деля его координатными гиперплоскостями на N^n кубиков со стороной $d/N < \varepsilon$, получаем покрытие Φ конечным набором ε -кубов. Однако в более сложных пространствах встречаются ограниченные, но не вполне ограниченные фигуры.

УПРАЖНЕНИЕ 6.22. Убедитесь, что $\Phi = \{\varphi \in \mathcal{C}^0([a, b]) \mid \forall x \in [a, b] \ |\varphi(x)| \leq 1\}$ ограничена, но не вполне ограничена в пространстве $\mathcal{C}^0([a, b])$.

СЛЕДСТВИЕ 6.1

Каждая непрерывная функция $f : \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ на компактной фигуре Φ в полном метрическом пространстве X достигает на ней максимального и минимального значения.

Доказательство. Согласно предл. 6.3 образ $f(\Phi) \subset \mathbb{R}$ компактен, в частности, ограничен и замкнут. Из ограниченности вытекает, что у $f(\Phi)$ есть конечные точная верхняя и точная нижняя грани. Из замкнутости $f(\Phi)$ вытекает, что точная верхняя и точная нижняя грани $f(\Phi)$ принадлежат $f(\Phi)$. \square

6.3. Нормы. В вещественной аффинной геометрии важную роль играют метрики, инвариантные относительно параллельных переносов и однородные по отношению к гомотетиям. Первое означает, что $\varrho(x, y) = \varrho(\vec{xy})$ зависит только от вектора \vec{xy} , а не от самих точек x и y . Второе означает, что для любых вектора v и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\varrho(\lambda v) = |\lambda| \varrho(v)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.7

Функция на векторном пространстве V над полем \mathbb{R} , сопоставляющая вектору $v \in V$ число $\|v\| \in \mathbb{R}$, называется *нормой* на V , если $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ и $\forall v, w \in V$ выполнены свойства

$$\begin{aligned} \|v\| &\geq 0 && \text{(положительность)} \\ \|v\| = 0 &\iff v = 0 && \text{(невырожденность)} \\ \|\lambda \cdot v\| &= |\lambda| \cdot \|v\| && \text{(однородность)} \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\| && \text{(неравенство треугольника)} \end{aligned}$$

Таким образом, всякая инвариантная относительно сдвигов и однородная относительно гомотетий метрика на вещественном аффинном пространстве над векторным пространством V имеет вид $\varrho(x, y) = \|\vec{xy}\|$ для некоторой нормы $v \mapsto \|v\|$ на V .

Например, евклидова метрика из прим. 6.7 получается из *евклидовой нормы*

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)},$$

а суп-метрика из прим. 6.8 — из *суп-нормы*

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_{\text{st}} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad (6-6)$$

которую мы далее будем называть *стандартной нормой* на \mathbb{R}^n .

6.3.1. Евклидовы нормы. Норма $v \mapsto \|v\|$ на вещественном векторном пространстве V называется *евклидовой*, если $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ для некоторой евклидовой структуры (v, w) на V .

Отметим, что стандартная норма (6-6) не является евклидовой. В самом деле, стандартная норма всех сторон и всех диагоналей квадрата, натянутого на стандартные базисные орты в \mathbb{R}^2 , равна 1. Между тем для евклидовых норм имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6

Норма $v \mapsto \|v\|$ евклидова, если и только если для неё выполняется *тождество параллелограмма*¹.

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2). \quad (6-7)$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Чтобы доказать достаточность, заметим, что для любой нормы $v \mapsto \|v\|$ на \mathbb{R}^n функция $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, заданная правилом $(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} (\|v + w\| - \|v - w\|)/4$ симметрична, невырождена и положительна. Очевидно также, что $(-v, w) = -(v, w) = (v, -w) \forall v, w \in V$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.23. Покажите, что если норма удовлетворяет тождеству (6-7), то

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w) \quad \text{и} \quad (v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2).$$

Из упр. 6.23 вытекает, что $(n \cdot v, w) = n \cdot (v, w)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ и всех $v, w \in V$. Полагая $u = n \cdot v$, заключаем, что $(\frac{1}{n} \cdot u, w) = \frac{1}{n} \cdot (u, w)$, откуда

$$(\lambda v, w) = \lambda(v, w) = (v, \lambda w) \quad \forall v, w \in V \quad \text{и} \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}.$$

С учётом упр. 6.23 это означает билинейность произведения (v, w) по отношению к линейным комбинациям с рациональными коэффициентами. Для доказательства билинейности по отношению к любым вещественным линейным комбинациям требуется

ЛЕММА 6.1

Любая норма $v \mapsto \|v\|$ на \mathbb{R}^n непрерывна в стандартной топологии.

Доказательство. Обозначим через $e_i \in \mathbb{R}^n$ стандартные базисные векторы и положим $M = \max_i \|e_i\|$. Тогда для любого $v \in \mathbb{R}^n$

$$\|v\| = \left\| \sum x_i e_i \right\| \leq \sum |x_i| \cdot \|e_i\| \leq nM \max_i |x_i| = nM \cdot \|v\|_{\text{st}}.$$

Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ при $\|v - w\|_{\text{st}} < \delta = \varepsilon/2nM$ выполняется неравенство $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\| < nM \cdot \|v - w\|_{\text{st}} < \varepsilon$. \square

Из леммы вытекает, что при фиксированных $v, w \in \mathbb{R}^n$ обе части равенства $(\lambda v, w) = \lambda(v, w)$ непрерывны как функции $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ от аргумента $\lambda \in \mathbb{R}$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.24. Докажите это.

Коль скоро они совпадают на всюду плотном подмножестве² $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то они совпадают всюду. \square

¹утверждающее, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырёх его сторон

²подмножество топологического пространства называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством

6.3.2. Топологическая эквивалентность норм. Будем называть две нормы на векторном пространстве V над полем \mathbb{R} *топологически эквивалентными*, если индуцированные ими метрики на аффинном пространстве $A(V)$ задают одну и ту же метрическую топологию на этом пространстве.

УПРАЖНЕНИЕ 6.25. Покажите, что для топологической эквивалентности двух различных норм $v \mapsto \|v\|_1$ и $v \mapsto \|v\|_2$ необходимо и достаточно, чтобы в каждом открытом шаре $\{v \in V : \|v\|_1 < \varepsilon\}$ первой нормы содержался некоторый открытый шар $\{v \in V : \|v\|_2 < \delta\}$ второй и наоборот.

ТЕОРЕМА 6.2

Любая норма на \mathbb{R}^n топологически эквивалентна стандартной sup-норме (6-8).

Доказательство. Согласно упр. 6.25, достаточно показать, что для любой нормы $v \mapsto \|v\|$ на \mathbb{R}^n можно подобрать вещественные положительные константы μ и M так, чтобы для всех $v \in \mathbb{R}^n$ выполнялись неравенства

$$\mu \cdot \|v\|_{\text{st}} \leq \|v\| \leq M \cdot \|v\|_{\text{st}} \quad (6-8)$$

(в этом случае стандартный ε -куб с центром в произвольной точке $p \in \mathbb{R}^n$ будет содержать внутри себя ε/M -шар нормы $v \mapsto \|v\|$ и, наоборот, каждый ε -шар этой нормы будет содержать внутри себя стандартный ε/μ -куб).

Граница $K = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_{\text{st}} = 1\}$ стандартного 1-куба с центром в нуле компактна (в стандартной топологии), и непрерывная согласно лем. 6.1 функция $v \mapsto \|v\|$ достигает на ней своих максимального и минимального значений $M = \sup_{v \in K} \|v\|$ и $\mu = \inf_{v \in K} \|v\|$. Заметим, что $\mu > 0$, поскольку иначе существовала бы сходящаяся в K последовательность $v_k \in K$ с $\|v_k\| \rightarrow 0$, что в силу непрерывности функции $v \mapsto \|v\|$ и невырожденности нормы означало бы равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0 \in K$, что не так. Следовательно, для всех $w \in K$ мы имеем неравенства $0 < \mu \leq \|w\| \leq M < \infty$. Подставляя в них $w = v/\|v\|_{\text{st}}$ получаем для любого $v \neq 0$ требуемые неравенства (6-8). \square

СЛЕДСТВИЕ 6.2

Сходимость в метрической топологии, заданной на \mathbb{R}^n при помощи произвольной нормы, означает покоординатную сходимость в какой-нибудь (а следовательно и в любой) системе аффинных координат.

6.4. Выпуклость. В аффинном пространстве над полем \mathbb{R} барицентрическая комбинация точек $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m$ (где $\sum x_i = 1$) называется *выпуклой*, если все её коэффициенты $x_i \geq 0$. Фигура Φ называется *выпуклой*, если она содержит все выпуклые барицентрические комбинации любых своих точек.

УПРАЖНЕНИЕ 6.26. Покажите, что для выпуклости фигуры необходимо и достаточно, чтобы вместе с любыми двумя своими точками p, q она содержала и соединяющий их отрезок $[p, q] = \{\lambda p + \mu q \mid \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu > 0\}$.

Очевидно, что пересечение выпуклых фигур выпукло. Пересечение всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру Φ , называется *выпуклой оболочкой* фигуры Φ и обозначается $\text{conv}(\Phi)$. Иначе $\text{conv}(\Phi)$ можно описать как множество всех выпуклых барицентрических комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры Φ .

Внутренность и замыкание любого выпуклого множества также выпуклы.

Первое вытекает из того, что если точки a и b содержатся в выпуклом множестве Φ вместе с некоторыми ε -кубами $B_\varepsilon(a), B_\varepsilon(b) \subset \Phi$, то все точки отрезка $[ab]$ содержатся в Φ вместе с такими же ε -кубами (см. рис. 6◊1).

Второе вытекает из того, что для

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \quad \text{и} \quad b = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$$

и любых фиксированных λ, μ мы имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda a + \mu b$, так что любая точка отрезка $[a, b]$ также является пределом последовательности точек фигуры Φ , если таковы были a и b .

ПРИМЕР 6.10 (СИМПЛЕКСЫ)

Выпуклая оболочка $k+1$ точек p_0, p_1, \dots, p_k , не лежащих ни в какой $(k-1)$ -мерной плоскости, называется k -мерным *симплексом* с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, p_1, \dots, p_k] = \left\{ \sum_{i=0}^k x_i p_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}. \quad (6-9)$$

Одномерные, двумерные и трёхмерные симплексы суть отрезки, треугольники и тетраэдры соответственно.

В аффинных координатах (x_1, x_2, \dots, x_n) с началом в p_0 относительно базиса $e_i = \overrightarrow{p_0 p_i}, i = 1, 2, \dots, n$, симплекс (6-9) задаётся системой из $(n+1)$ линейных неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1. \end{cases} \quad (6-10)$$

т. е. является пересечением $(n+1)$ полупространств.

УПРАЖНЕНИЕ 6.27. Проверьте, что симплекс $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ имеет непустую внутренность, а его граница является объединением всевозможных симплексов вида $[p_{\nu_1}, p_{\nu_2}, \dots, p_{\nu_m}]$ с $m < n$ и $\nu_i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

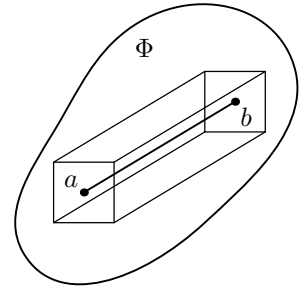


Рис. 6◊1. Внутренность выпуклой фигуры выпукла.

ПРИМЕР 6.11 (ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НОРМ)

Поскольку все нормы на векторном пространстве \mathbb{R}^n задают одну и ту же топологию, для любой нормы $v \mapsto \|v\|$ её единичный шар с центром в нуле

$$B_1(0) = \{v \in V : \|v\| \leq 1\} \quad (6-11)$$

ограничен, замкнут и содержит нуль в качестве внутренней точки.

Из однородности нормы вытекает, что этот шар центрально симметричен относительно нуля, а из неравенства треугольника — что он выпуклый: для любых v, w с $\|v\|, \|w\| \leq 1$ и любых $\lambda, \mu > 0$ с $\lambda + \mu = 1$ имеем

$$\|\lambda v + \mu w\| \leq \lambda \|v\| + \mu \|w\| \leq 1.$$

Норма $v \mapsto \|v\|$ однозначно восстанавливается по единичному шару (6-11) как

$$\|v\| = \inf(\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \mid \lambda^{-1}v \in B_1(0)). \quad (6-12)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7

Формулы (6-11) и (6-12) устанавливают биекцию между нормами на \mathbb{R}^n и выпуклыми компактами в \mathbb{R}^n , содержащими нуль в качестве внутренней точки и центрально симметричными относительно нуля.

Доказательство. С учётом сказанного выше, нам остаётся только проверить, что функция $v \mapsto \|v\|_{\Phi} = \inf(\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \mid v \in \lambda\Phi)$, построенная по любому выпуклому компактному Φ , удовлетворяющему условию теоремы, является нормой на \mathbb{R}^n . Положительность, невырожденность и однородность этой функции достаточно проверить при $n = 1$, где они очевидны. Неравенство треугольника следует из выпуклости: $\forall v, w \in V$ точка

$$q = \frac{v + w}{\|v\|_{\Phi} + \|w\|_{\Phi}} = \frac{\|v\|_{\Phi}}{\|v\|_{\Phi} + \|w\|_{\Phi}} \cdot \frac{v}{\|v\|_{\Phi}} + \frac{\|w\|_{\Phi}}{\|v\|_{\Phi} + \|w\|_{\Phi}} \cdot \frac{w}{\|w\|_{\Phi}}$$

является выпуклой барицентрической комбинацией лежащих в Φ точек $v/\|v\|_{\Phi}$ и $w/\|w\|_{\Phi}$. Поэтому $q \in \Phi$, т. е. $\|q\|_{\Phi} \leq 1$ и $\|v + w\|_{\Phi} \leq \|v\|_{\Phi} + \|w\|_{\Phi}$. \square

6.4.1. Аффинные функционалы. Рассмотрим аффинное пространство

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$$

над n -мерным векторным пространством $V \simeq \mathbb{R}^n$. Будем называть *аффинным функционалом* на \mathbb{A}^n аффинное отображение $\xi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$. В аффинной системе координат (x_1, x_2, \dots, x_n) с центром в какой-нибудь точке $p \in \mathbb{A}^n$ аффинный функционал имеет вид

$$\xi(x) = \alpha(x) + \beta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \beta,$$

где $\alpha = D_{\xi} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in V^*$ — линейная форма на V , а $\beta = \xi(p) \in \mathbb{R}$ — некоторое число.

Ограничение любого аффинного функционала $\xi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ на произвольный отрезок $[a, b] \subset \mathbb{A}^n$ представляет собою «школьную линейную функцию»

$$\xi(x) = \alpha x + \beta$$

на этом отрезке. Очевидно, что для такой функции имеются следующие исключающие друг друга возможности:

- ξ тождественно обращается в нуль
- ξ вообще не обращается в нуль и имеет на всём отрезке постоянный знак
- ξ обращается в нуль ровно в одной точке $x_0 \in [a, b]$, и в этом случае имеется дальнейшая альтернатива:
 - x_0 является одним из концов и ξ имеет постоянный знак на полуинтервале $[a, b] \setminus x_0$
 - $a < x_0 < b$ и ξ имеет постоянный знак на каждом из полуинтервалов $[a, x_0]$ и $(x_0, b]$, причём эти знаки противоположны¹

Из этого вытекает, что с каждым непостоянным аффинным функционалом $\xi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ связано разбиение аффинного пространства \mathbb{A}^n в дизъюнктное объединение аффинной гиперплоскости

$$H_\xi = \{p \in \mathbb{A}^n \mid \xi(p) = 0\},$$

где ξ обращается в нуль, и двух выпуклых *открытых полупространств*

$$\overset{\circ}{H}_\xi^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \xi(p) > 0\} \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{H}_\xi^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \xi(p) < 0\} \quad (6-13)$$

с общей границей $\partial \overset{\circ}{H}_\xi^+ = \partial \overset{\circ}{H}_\xi^- = H_\xi$. При этом любой отрезок с концами в разных открытых полупространствах пересекает границу H_ξ в единственной точке, которая является внутренней точкой этого отрезка. Замыканиями открытых полупространств (6-13) являются *замкнутые полупространства*

$$H_\xi^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \xi(p) \geq 0\} \quad \text{и} \quad H_\xi^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \xi(p) \leq 0\}. \quad (6-14)$$

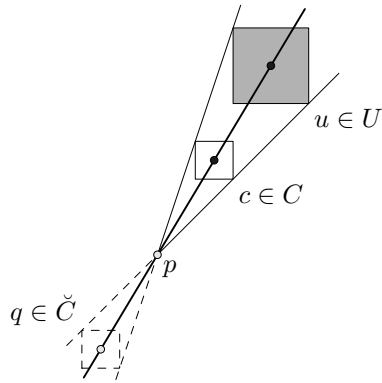
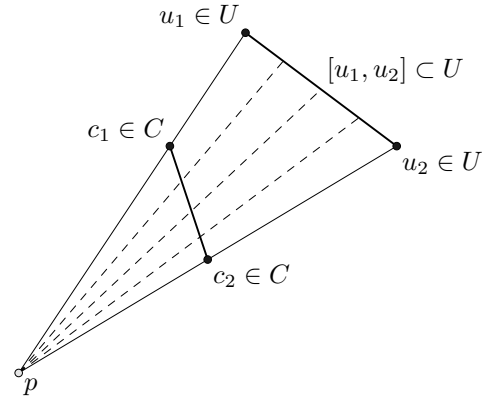
Это замкнутые выпуклые множества с общей границей $\partial H_\xi^+ = \partial H_\xi^- = H_\xi$, и открытые полупространства (6-13) являются в точности их внутренностями.

Предложение 6.8

Для любого открытого выпуклого множества U и любой точки $p \notin U$ в аффинном пространстве \mathbb{A}^n размерности $n \geq 2$ существует проходящая через p прямая, не пересекающая U .

¹ в частности, значения ξ на концах отрезка отличны от нуля и противоположны по знаку

Доказательство. Обозначим через $C \subset \mathbb{A}^n$ объединение всех пересекающих U открытых¹ лучей с началом в p . Из рис. 6◊2–рис. 6◊3 очевидно, что C является открытой выпуклой фигурой. Кроме того, $p \in \partial C$, и из выпуклости C следует, что любая проходящая через p прямая ℓ либо вообще не пересекает C , либо пересекает так, что все точки ℓ по одну сторону от p являются внутренними точками C , а по другую сторону — внешними точками C (см. рис. 6◊2).

Рис. 6◊2. Открытость C и непустота \check{C} .Рис. 6◊3. Выпуклость C .

В частности, внешние для C точки существуют. Пусть q — одна из них. Поскольку $n > 1$ через q можно провести пересекающую C прямую, отличную от прямой (qp) . На ней будет точка $r \in \partial C$. Прямая (pr) не пересекает $C \supset U$, т. к. содержит граничную для C точку $r \neq p$. \square

Следствие 6.3

Если аффинная плоскость π (возможно нульмерная) не пересекает открытое выпуклое множество U , то она содержится в некоторой не пересекающей U гиперплоскости коразмерности 1.

Доказательство. Поместим начало координат внутрь π и отождествим π с векторным подпространством $W \subset \mathbb{R}^n$ (возможно нулевым). В множестве всех векторных подпространств $H \subset \mathbb{R}^n$, содержащих W и не пересекающих U , рассмотрим какое-нибудь максимальное по включению подпространство H . Выберем любое дополнительное к H подпространство H' : $H \oplus H' = \mathbb{R}^n$ и покажем, что $\dim H' = 1$. Для этого спроектируем \mathbb{R}^n на H' вдоль H . Поскольку отрезки спроектируются в отрезки, а кубы — в кубы, U спроектируется в открытое выпуклое множество, не содержащее нуля, т. к. $H \cap U = \emptyset$. Если $\dim H' > 1$, то по предл. 6.8 в H' найдётся одномерное подпространство L , не пересекающее проекцию U . Тогда $H \oplus L$ не пересекает U и строго больше, чем H , что противоречит выбору H . \square

¹Т. е. с выколотым началом

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.8 (ОПОРНЫЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ)

Гиперплоскость H_ξ называется *опорной гиперплоскостью* фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, если $\Phi \subset H_\xi^+$ и $H_\xi \cap \partial\Phi \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 6.3

Через каждую граничную точку p любого выпуклого множества Φ можно провести опорную гиперплоскость.


Доказательство. Если $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ целиком содержится в какой-нибудь гиперплоскости, то она и будет опорной. Если в Φ есть $(n+1)$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости, то по упр. 6.27 внутренность $\overset{\circ}{\Phi} \neq \emptyset$. Проведём через p гиперплоскость H_ξ , не пересекающую $\overset{\circ}{\Phi}$. Функционал ξ имеет на $\overset{\circ}{\Phi}$ постоянный знак (в противном случае соединив точки разного знака отрезком, мы получим на этом отрезке нуль функционала, т. е. точку из $H_\xi \cap \Phi$). Меняя, если нужно, знак у ξ , мы можем считать, что $\overset{\circ}{\Phi} \subset H_\xi^+$. Замыкание внутренности $\overset{\circ}{\Phi}$ лежит в замкнутом полупространстве H_ξ^+ , а Φ лежит в замыкании $\overset{\circ}{\Phi}$. \square

ТЕОРЕМА 6.4

Всякое замкнутое выпуклое множество Z является пересечением своих опорных полупространств.

Доказательство. Применяя индукцию по размерности наименьшего аффинного подпространства, содержащего Z , мы можем считать, что Z не содержится в гиперплоскости, а значит, имеет непустую внутренность. Покажем, что в этом случае каждая внешняя точка $q \notin Z$ не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств множества Z . Для этого соединим q отрезком $[q, p]$ с какой-нибудь внутренней точкой $p \in \overset{\circ}{Z}$ и проведём опорное полупространство H_ξ^+ к Z в граничной точке $r \in [q, p] \cap \partial Z$. Поскольку r лежит строго внутри $[q, p]$, из $\xi(p) > 0$ и $\xi(r) = 0$ следует, что $\xi(q) < 0$, т. е. $q \notin H_\xi^+$. \square

6.4.2. Грани и крайние точки. Пересечение замкнутой выпуклой фигуры Φ с любой её опорной гиперплоскостью называется *гранью* фигуры Φ . Всякая грань тоже является замкнутым выпуклым множеством. Размерностью грани называется размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Отметим, что размерность любой грани фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ строго меньше n . Нульмерные грани (т. е. грани-точки) называются *вершинами*. Под внутренними, внешними и граничными точками грани понимаются таковые точки в индуцированной топологии наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань.

Интуитивное содержание термина «грань», основанное на опыте работы с многогранниками, не всегда адекватно при работе с *произвольными* выпуклыми замкнутыми множествами. Например, у шара имеется континуальное множество граней и все они нульмерны, а у фигуры  (гладкое сопряжение

отрезков с овалами) имеются одномерные грани, нульмерные грани которых не являются гранями самой фигуры. Таким образом, грань грани замкнутой выпуклой фигуры Φ может не быть гранью для Φ .

Точки, которые возникают как последние нульмерные элементы во всевозможных цепочках вида: фигура Φ , грань фигуры Φ , грань грани фигуры Φ , грань грани грани фигуры Φ , ... называются *крайними точками* замкнутой выпуклой фигуры Φ . Точка $p \in \Phi$ является крайней тогда и только тогда, когда она не является внутренней точкой никакого отрезка, целиком содержащегося в Φ . В самом деле, точка, не лежащая внутри никакого отрезка из Φ , не может быть внутренней ни для Φ , ни для грани Φ , ни для грани грани Φ и т. д. пока размерность грани больше нуля. Наоборот, если p является внутренней точкой содержащегося в Φ отрезка, то p лежит на грани, если и только если оба конца этого отрезка также лежат на той же грани (иначе высекающий грань функционал менял бы на концах отрезка знак и не был бы опорным). Поэтому точка p не может сама оказаться нульмерной гранью ни у Φ , ни у грани Φ , ни у грани грани Φ и т. д.

УПРАЖНЕНИЕ 6.28. Покажите, что крайние точки любой грани замкнутой выпуклой фигуры Φ являются крайними и для Φ (в частности, все вершины являются крайними точками), и приведите пример фигуры, имеющей крайние точки, отличные от вершин.

Предложение 6.9

Всякая ограниченная замкнутая выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Доказательство. Индукция по размерности. Любая внутренняя точка $p \in \overset{\circ}{\Phi}$ является выпуклой комбинацией концов отрезка, высекаемого фигурой Φ на любой проходящей через p прямой. Эти концы лежат на гранях и по индукции являются выпуклыми комбинациями крайних точек этих граней. По упр. 6.28 крайние точки граней являются крайними точками и для Φ . \square