

## §7. Выпуклые многогранники и многогранные конусы

В этом параграфе мы всюду обозначаем через  $V \simeq \mathbb{R}^n$   $n$ -мерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$ , через  $V^*$  — двойственное к  $V$  векторное пространство линейных форм  $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ . Мы используем симметричное обозначение

$$\langle \psi, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \psi(v) \quad (7-1)$$

для значения ковектора  $\psi \in V^*$  на векторе  $v \in V$ . Мы обозначаем через  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  аффинизацию пространства  $V$ , а через  $o \in \mathbb{A}^n$  — точку, соответствующую нулевому вектору.

**7.1. Выпуклые многогранники.** Множество  $M \subset \mathbb{A}(V)$  решений конечной системы нестрогих линейных неравенств  $\alpha_i(v) \geq 0$ , где

$$\alpha_i = \psi_i + c_i : \mathbb{A}(V) \xrightarrow{v \mapsto \langle \psi_i, v \rangle + c_i} \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

суть аффинные функционалы с дифференциалами  $\psi_i = D_{\alpha_i} \in V^*$  и свободными членами  $c_i = \alpha_i(o) \in \mathbb{R}$ , называется *выпуклым многогранником* (или *полиэдром*).

Согласно этому определению, пересечение любого конечного множества выпуклых многогранников является выпуклым многогранником.

Всё пространство  $\mathbb{A}(V)$  — это выпуклый многогранник, задаваемый неравенством  $1 \geq 0$ , в котором аффинный функционал  $\alpha = 1$  тождественно равен единице на всём пространстве  $\mathbb{A}(V)$ . Пустое множество — это выпуклый многогранник, задаваемый неравенством  $-1 \geq 0$ .

Любое аффинное подпространство  $\Pi = p + U$ , где  $U \subset V$  векторное подпространство, а  $p \in \mathbb{A}^n$  — точка, также является выпуклым многогранником, ибо является пересечением аффинных гиперплоскостей, задаваемых линейными (неоднородными) уравнениями  $\langle \psi_i, v \rangle = c_i$ , где  $\psi_i \in V^*$  — порождают векторное подпространство  $\text{Ann}(U) \subset V^*$ , а  $c_i = \psi_i(p) \in \mathbb{R}$ , и каждая такая гиперплоскость в свою очередь является пересечением двух замкнутых полупространств, задаваемых неравенствами  $\langle \psi_i, v \rangle \geq c_i$  и  $\langle \psi_i, v \rangle \leq c_i$ .

Из сказанного следует, что сечение выпуклого многогранника произвольным аффинным подпространством является выпуклым многогранником.

Напомним, что для аффинного функционала  $\alpha : \mathbb{A}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$  мы полагаем

$$\begin{aligned} H_\alpha^+ &= \{p \in \mathbb{A}(V) \mid \alpha(p) \geq 0\}, \\ H_\alpha &= \{p \in \mathbb{A}(V) \mid \alpha(p) = 0\}. \end{aligned}$$

Если аффинный функционал  $\alpha \equiv c$  является константой, то

$$H_\alpha^+ = \begin{cases} \mathbb{A}(V) & \text{при } c \geq 0 \\ \emptyset & \text{при } c < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad H_\alpha = \begin{cases} \mathbb{A}(V) & \text{при } c = 0 \\ \emptyset & \text{при } c \neq 0. \end{cases}$$

Если  $\alpha$  не постоянен и имеет ненулевой дифференциал  $D_\alpha = \psi \in V^*$ , то  $H_\alpha^+$  — это «настоящее» полупространство с граничной гиперплоскостью  $H_\alpha$  коразмерности 1 в  $\mathbb{A}(V)$ , параллельной векторному подпространству  $\text{Ann } D_\alpha \subset V$ .

В этих обозначениях выпуклый многогранник есть замкнутая выпуклая фигура вида

$$M = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha^+,$$

где  $A$  — это конечное множество аффинных функционалов  $\alpha : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**7.1.1. Грани.** Напомним, что *гранью* замкнутого выпуклого множества  $M$  называется пересечение  $M$  с любым его опорным полупространством. Любой непустой многогранник, отличный от всего пространства, имеет грани, и каждая из них непуста. Весь многогранник может оказаться своей гранью.

УПРАЖНЕНИЕ 7.1. Приведите пример такой ситуации.

Под *размерностью* грани мы всегда понимаем размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Грани, отличные от  $M$  называются *собственными*.

УПРАЖНЕНИЕ 7.2. Покажите, что каждая собственная грань имеет размерность, строго меньшую, чем размерность  $M$ .

Грани  $\Gamma \subset M$  размерности  $\dim \Gamma = \dim M - 1$  называются *гипергранями*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1 (ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГРАНЕЙ)

Пусть многогранник  $M = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha^+$  задаётся конечным множеством  $A$  аффинных функционалов. Для каждого непустого  $I \subseteq A$  положим  $H_I = \bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha$ . Для каждой грани  $\Gamma \subset M$  положим  $A_\Gamma = \{\alpha \in A \mid \Gamma \subseteq H_\alpha\}$  и  $H_\Gamma = H_{A_\Gamma}$ . Тогда

- 1) для каждого непустого  $I \subset A$  пересечение  $\Gamma_I = M \cap H_I$  либо пусто, либо является гранью  $M$
- 2) для каждой грани  $\Gamma \subset M$  подмножество  $A_\Gamma \subset A$  непусто, и  $\Gamma = \Gamma_{A_\Gamma} = M \cap H_\Gamma$
- 3) точка  $p$  грани  $\Gamma \subset M$  является внутренней точкой<sup>1</sup>  $\Gamma$ , если и только если  $\alpha(p) > 0$  для каждого  $\alpha \notin A_\Gamma$ .
- 4)  $\dim \Gamma = \dim H_\Gamma$ , т.е.  $H_\Gamma$  — это наименьшее аффинное подпространство, содержащее  $\Gamma$ .

Доказательство. Если многогранник  $\Gamma_I = M \cap H_I$  не пуст, то аффинный функционал  $\alpha_I = \sum_{\alpha \in I} \alpha$  является опорным для  $M$  и  $\Gamma_I = M \cap H_{\alpha_I}$ . Это доказывает первое утверждение.

<sup>1</sup>в топологии наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань

Рассмотрим теперь произвольную грань  $\Gamma = M \cap H_\eta$ , высекаемую некой опорной гиперплоскостью  $H_\eta$ . Для каждого  $\psi \in A \setminus A_\Gamma$  найдётся точка  $q_\psi \in \Gamma$ , такая что  $\psi(q_\psi) > 0$ . Поэтому все функционалы  $\psi \in A \setminus A_\Gamma$  строго положительны в центре тяжести  $q_\Gamma$  точек  $q_\psi$ . Из этого вытекает, что  $A_\Gamma \neq \emptyset$  — в противном случае все функционалы  $\alpha \in A$  строго положительны в  $q_\Gamma$ , а значит, и на некотором кубе с центром в  $q_\Gamma$ , откуда  $q_\Gamma$  — внутренняя точка  $M$ . Таким образом,  $A_\Gamma \neq \emptyset$  и  $\Gamma \subset H_\Gamma \cap M = \Gamma_{A_\Gamma}$ , в частности,  $H_\Gamma \neq \emptyset$  и  $\Gamma_{A_\Gamma} \neq \emptyset$ .

Докажем теперь, что для грани  $\Gamma_{A_\Gamma}$  выполнено третье утверждение предложения. Пусть точка

$$p \in \Gamma_{A_\Gamma} = H_\Gamma \cap M$$

такова, что  $\psi(p) > 0$  для любого  $\psi \in A \setminus A_\Gamma$ . Поскольку эти строгие неравенства выполнены на некоторой кубической окрестности точки  $p$  в аффинном пространстве  $H_\Gamma$ , точка  $p$  входит в  $\Gamma_{A_\Gamma} = H_\Gamma \cap M$  вместе с этой окрестностью. Это, во-первых, означает что  $p$  является внутренней точкой грани  $\Gamma_{A_\Gamma}$ , а во-вторых, — что  $H_\Gamma$  является наименьшим аффинным подпространством, содержащим<sup>1</sup>  $\Gamma_{A_\Gamma}$ . Это даст (4), как только мы докажем (2) и (3).

С другой стороны, если функционал  $\psi \in A$  зануляется в некоторой точке  $p$  произвольной грани  $\Gamma'$  и положителен в некоторой другой точке  $q$  этой грани, то точка  $p$  не может быть внутренней точкой грани  $\Gamma'$ : в противном случае продлевая отрезок  $[q, p]$  немного за точку  $p$  мы получаем в грани  $\Gamma'$  точку, в которой  $\psi$  отрицателен. Это доказывает утверждение (3) для грани  $\Gamma_{A_\Gamma}$ .

Из этого мы заключаем, что построенная в начале доказательства точка

$$q_\Gamma \in \Gamma = M \cap H_\eta$$

является внутренней точкой грани  $\Gamma_{A_\Gamma} \supset \Gamma$ . Но тогда каждая точка  $p \in \Gamma_{A_\Gamma}$  принадлежит  $\Gamma$ : продлевая, как и выше, отрезок  $[p, q_\Gamma]$  за точку  $q_\Gamma$  так, чтобы  $q_\Gamma \in [p, r] \subset \Gamma_{A_\Gamma}$ , из  $\eta(q_\Gamma) = 0$ ,  $\eta(p) \geq 0$  и  $\eta(r) \geq 0$  получаем  $\eta(r) = \eta(p) = 0$ , т. е.  $p \in \Gamma$ . Итак,  $\Gamma_{A_\Gamma} \subset \Gamma$ , что доказывает (2), а с ним и (3), и (4).  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.1** На языке формул доказанное предложение означает следующее. Пусть многогранник  $M$  задаётся системой неравенств  $\alpha(v) \geq 0$ ,  $\alpha \in A$ . Если в этой системе заменить часть неравенств на равенства, то множество решений полученной системы соотношений будет либо пустым, либо гранью  $M$  (возможно, совпадающей с  $M$ ), причём все грани  $M$  можно получить таким способом. А именно, для задания грани  $\Gamma \subset M$  надо заменить в определяющей  $M$  системе на равенства все те неравенства, которые обращаются в равенства при ограничении на грань  $\Gamma$ . Доказательство предл. 7.1 показывает, что такие неравенства обязательно есть, причём если заменить их равенствами, а все остальные неравенства выкинуть, то множество решений полученной системы уравнений будет наименьшим аффинным подпространством, содержащим

<sup>1</sup>подчёркнём, что при  $A_\Gamma = A$  это рассуждение тоже работает

грань  $G$ , а внутренние точки грани  $G$  будут характеризоваться тем, что все выкинутые неравенства в этих точках строгие.

#### СЛЕДСТВИЕ 7.1

Любой выпуклый многогранник имеет конечное множество граней, причём все они также являются выпуклыми многогранниками, и каждая грань любой грани является гранью исходного многогранника.  $\square$

#### СЛЕДСТВИЕ 7.2

Крайними точками произвольного выпуклого многогранника являются его вершины и только они.  $\square$

#### СЛЕДСТВИЕ 7.3

Каждый ограниченный выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин, причём множество вершин конечно.  $\square$

#### ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2

Следующие свойства многогранника  $M \subset \mathbb{A}(V)$  эквивалентны друг другу:

- 1)  $M$  не имеет вершин
- 2)  $M$  содержит аффинное подпространство положительной размерности
- 3)  $V = U \oplus W$ , где  $0 < \dim U < \dim V$ , и  $M = \mathbb{A}(U) \times M' \subset \mathbb{A}(U) \times \mathbb{A}(W)$ , где  $M' \subset \mathbb{A}(W)$  — выпуклый многогранник и  $\dim M' = \dim M - \dim U$ .

Доказательство. (1)  $\Rightarrow$  (2). Если многогранник  $M$  отличен от наименьшего аффинного подпространства, в котором он содержится, то в этом подпространстве у него есть собственная опорная гиперплоскость, а значит, и грань строго меньшей размерности, чем  $\dim M$ . Заменяя  $M$  на эту грань и повторяя рассуждение, мы в конце концов получим грань  $M$ , совпадающую с наименьшим содержащим её аффинным подпространством. Если это подпространство — точка, то построенная грань — вершина. Если нет, то выполнено (2).

(2)  $\Rightarrow$  (3). Если  $M = \bigcap_{\alpha \in A} H_{\alpha}^{+} \supset p + U$ , где  $U \subset V$  — ненулевое векторное подпространство, то каждый из аффинных функционалов  $\alpha = \psi_{\alpha} + c \in A$  имеет дифференциал  $\psi_{\alpha} \in \text{Ann } U$ : иначе  $\exists u \in U$  с  $\psi_{\alpha}(u) < 0$ , и при  $t \gg 0$

$$\alpha(p + tu) = t\psi_{\alpha}(u) + \psi(p) + c_{\alpha} < 0 \quad \Rightarrow \quad p + tu \notin M.$$

Выберем дополнительное к  $U$  векторное подпространство  $W \subset V$ . Тогда

$$V = U \oplus W, \quad \mathbb{A}(V) = \mathbb{A}(U) \times \mathbb{A}(W)$$

и  $\forall \alpha \in A$  и  $\forall (u, w) \in \mathbb{A}(U) \times \mathbb{A}(W)$  значение  $\alpha(u, w) = \alpha(o, w)$  не зависит от  $u \in \mathbb{A}(U)$ , т. е.  $M = \mathbb{A}(U) \times M'$ , где  $M' \subset \mathbb{A}(W)$  — многогранник, задаваемый ограничениями неравенств  $\alpha(v) \geq 0$  на подпространство  $\{o\} \times \mathbb{A}(W) \subset \mathbb{A}(V)$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1). Если  $M = \mathbb{A}^k \times M'$ , где  $k \geq 1$ , то через каждую точку  $M$  проходит аффинное подпространство  $\mathbb{A}^k$ , целиком содержащееся в  $M$ , и потому никакая точка  $M$  не может быть крайней.  $\square$

### Предложение 7.3

Пусть многогранник  $M = \bigcap_{\alpha \in A} H_{\alpha}^{+}$  непуст и отличен от наименьшего аффинного пространства, в котором он содержится. Если функционал  $\alpha' \in A$  таков, что  $H_{\alpha'} \cap M$  не является гипергранью  $M$ , то система неравенств  $A' = A \setminus \alpha'$  задаёт тот же самый многогранник  $M$ .

*Доказательство.* Перейдём к наименьшему аффинному пространству, содержащему  $M$ . Тогда в  $M$  имеется точка  $p$ , лежащая в  $M$  вместе со своей окрестностью в этом пространстве. Если многогранник  $M' = \bigcap_{\alpha \in A'} H_{\alpha}^{+}$  строго больше  $M$ , то найдётся точка  $q \in M'$ , в которой  $\alpha'(q) < 0$ . Рассмотрим точку  $r = [p, q] \cap H_{\alpha'}$ . Поскольку точка  $p$  внутренняя для  $M'$ , точка  $r$  тоже внутренняя для  $M'$  — гомотетия с центром в  $q$ , переводящая  $p$  в  $r$ , отображает содержащуюся в  $M'$  окрестность  $U_p$  точки  $p$  в содержащуюся в  $M'$  окрестность  $U_r$  точки  $r$ . Пересечение  $U_r' = H_{\alpha'} \cap U_r$  является окрестностью точки  $r$  в топологии гиперплоскости  $H_{\alpha'}$  и содержится в многограннике  $M$ . Поскольку точка  $r$  лежит в грани  $H_{\alpha'} \cap M$  многогранника  $M$  вместе со своей окрестностью в топологии гиперплоскости  $H_{\alpha'}$ , размерность  $\dim H_{\alpha'} \cap M = \dim H_{\alpha'}$ . Таким образом,  $H_{\alpha'} \cap M$  является гипергранью многогранника  $M$ .  $\square$

### Следствие 7.4

Если система  $A$  задающих  $M$  неравенств минимальна в том смысле, что никакое неравенство нельзя исключить из неё без увеличения многогранника, то для каждого  $\alpha \in A$  пересечение  $H_{\alpha} \cap M$  является гипергранью  $M$ .  $\square$

**7.2. Выпуклые многогранные конусы.** Множество всех неотрицательных линейных комбинаций конечного набора векторов  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  называется *выпуклым многогранным (или полиэдральным) конусом*, порождённым векторами  $v_i$ , и обозначается

$$\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m} = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in V \mid \forall i \lambda_i \geq 0 \} \quad (7-2)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 7.3.** Убедитесь, что  $\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m}$  является замкнутой выпуклой фигурой в  $\mathbb{A}(V)$ , содержит нулевую точку  $o \in \mathbb{A}(V)$  и вместе с каждой точкой  $p \neq o$  содержит замкнутый луч  $[o, p)$ .

### Лемма 7.1

Каждая опорная гиперплоскость любого выпуклого многогранного конуса  $\sigma$  проходит через нуль.

Доказательство. Пусть опорная гиперплоскость  $H_\eta$  проходит через отличную от нуля точку  $p \in \partial\sigma$ . Если  $\eta(o) > 0$ , то ограничение опорного функционала  $\eta$  на луч  $[o, p) \subset \sigma$  должно менять в точке  $p$  знак, что невозможно.  $\square$

Следствие 7.5 (ЛЕММА ФАРКАША)

Если вектор  $w \in V$  не лежит в многогранном конусе  $\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m}$ , то существует линейный функционал  $\varphi \in V^*$ , такой что  $\varphi(w) < 0$  и  $\forall i \varphi(v_i) \geq 0$ .

Доказательство. По теор. 6.4 и лем. 7.1 замкнутый выпуклый конус  $\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m}$  является пересечением своих опорных полупространств  $H_\varphi^+$  с  $\varphi \in V^*$ . Поэтому  $\forall w \notin \sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m} \exists$  опорный  $\varphi \in V^* : \sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m} \subseteq H_\varphi^+$  и  $w \notin H_\varphi^+$ .  $\square$

ТЕОРЕМА 7.1 (ТЕОРЕМА ФАРКАША – МИНКОВСКОГО – ВЕЙЛЯ)

Фигура  $\sigma \subset V$  является выпуклым многогранным конусом, если и только если она является пересечением конечного множества замкнутых полупространств, граничные гиперплоскости которых проходят через нуль.

Доказательство. Пусть выпуклый многогранник  $\Phi \subset \mathbb{A}(V)$  является пересечением конечного числа полупространств  $H_\psi^+$  с  $\psi \in V^*$ . Тогда  $o \in \Phi$  и  $\Phi$  вместе с каждой точкой  $p \neq o$  содержит весь замкнутый луч  $[o, p)$ . Пересечение  $\Phi$  со стандартным единичным кубом в  $\mathbb{A}(V)$  является ограниченным выпуклым многогранником и по сл. 7.3 представляет собою выпуклую оболочку своих вершин — некоего конечного набора векторов  $v_1, v_2, \dots, v_m \in \Phi$ . Поскольку для любого ненулевого  $v \in \Phi$  вектор  $v/\|v\|_{\text{st}} \in \sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m}$ , фигура  $\Phi$  является конусом, натянутым на ненулевые  $v_i$ .

Покажем, что и наоборот, любой полиэдральный конус  $\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m} \subset V$  является пересечением конечного числа своих опорных полупространств. Линейный функционал  $\psi \in V^*$  является опорным для  $\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m}$  тогда и только тогда, когда  $\text{ev}_{v_i}(\psi) = \psi(v_i) \geq 0$  при  $i = 1, 2, \dots, m$ . Поэтому множество всех опорных функционалов конуса  $\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m}$  есть пересечение конечного числа полупространств  $H_{\psi_i}^+ \subset V^*$ . По уже доказанному это пересечение представляет собою выпуклый многогранный конус  $\sigma_{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N} \subset V^*$ , а значит, любое опорное неравенство  $\psi(v) \geq 0$  является следствием конечного набора неравенств  $\psi_i(v) \geq 0$ , отвечающих образующим  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$  этого конуса.  $\square$

Следствие 7.6 (ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО – ВЕЙЛЯ)

Фигура  $M \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  является ограниченным выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда она представляет собою выпуклую оболочку конечного набора точек  $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{A}(V)$ .

Доказательство. Импликация  $\Rightarrow$  была установлена в сл. 7.3. Наоборот, выпуклая оболочка  $\text{conv}(p_1, p_2, \dots, p_m)$  любого конечного набора точек содержится в стандартном  $\varepsilon$ -кубе с центром в нуле и с  $\varepsilon = \max_i \|p_i\|_{\text{st}}$ . Тем самым, она ограничена. Чтобы убедиться в том, что она является многогранником, вложим

$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  в  $(n+1)$ -мерное аффинное пространство  $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(\mathbb{R} \oplus V)$  в качестве аффинной гиперплоскости  $\Pi = (1, 0) + V$ . В  $\mathbb{A}(\mathbb{R} \oplus V)$  выпуклая оболочка  $\text{conv}(p_1, p_2, \dots, p_n)$  является пересечением гиперплоскости  $\Pi$  с замкнутым многогранным конусом  $\sigma_{w_1, w_2, \dots, w_m}$ , порождённым векторами  $w_i = (1, p_i) \in \mathbb{R} \oplus V$ . По теор. 7.1 этот конус является многогранником, а значит, многогранником является и его гиперплоское сечение.  $\square$

**7.2.1. Двойственность и грани.** Зафиксируем произвольное конечное множество векторов  $R \subset V$  и обозначим через  $\sigma_R \subset V$  натянутый на них конус. Множество всех опорных функционалов этого конуса обозначается  $\sigma_R^\vee \subset V^*$  и представляет собою пересечение конечного числа проходящих через нуль полупространств в двойственном пространстве  $V^*$

$$\sigma_R^\vee = \{\psi \in V^* \mid \forall v \in \sigma_R \langle \psi, v \rangle \geq 0\} = \bigcap_{v \in R} H_v^+.$$

По теор. 7.1  $\sigma_R^\vee$  также является конусом, т.е. имеет вид  $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$  для некоторого конечного набора ковекторов  $R^\vee \subset V^*$ . Конус  $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$  называется *двойственным* к конусу  $\sigma_R \subset V$ . По сл. 7.5 исходный конус

$$\sigma_R = \{v \in V \mid \forall \psi \in \sigma_R^\vee \langle \psi, v \rangle \geq 0\} = \bigcap_{\psi \in R^\vee} H_\psi^+ = \sigma_{R^\vee}^\vee$$

есть конус, двойственный к  $\sigma_R^\vee$ . Таким образом, для любого конуса  $\sigma$  имеет место равенство  $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$ .

Следуя геометрическому описанию граней, данному в в предл. 7.1, свяжем с каждой гранью  $\Gamma \subset \sigma_R$  подмножество  $R_\Gamma^\vee \subset R^\vee$ , состоящее из всех образующих двойственного конуса, аннулирующих грань  $\Gamma$ :

$$R_\Gamma^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi \in R^\vee \mid \Gamma \subset H_\psi\} = R^\vee \cap \text{Ann } \Gamma,$$

а также подпространство, на котором все эти образующие зануляются:

$$H_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\psi \in R_\Gamma^\vee} H_\psi = \text{Ann } R_\Gamma^\vee.$$

### Следствие 7.7

Каждая грань  $\Gamma = \sigma_R \cap H_\Gamma$  выпуклого полиэдрального конуса  $\sigma_R \subset V$  является конусом, натянутым на все лежащие в ней векторы из  $R$ , т.е. на множество векторов  $R_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} R \cap \Gamma = R \cap (\sigma_R \cap H_\Gamma) = R \cap H_\Gamma$ , причём  $R_\Gamma$  линейно порождает линейную оболочку  $H_\Gamma$  грани  $\Gamma$ .

*Доказательство.* Согласно предл. 7.1, векторное подпространство  $H_\Gamma$  является линейной оболочкой грани  $\Gamma$ , и  $\Gamma = \sigma_R \cap H_\Gamma \supset R_\Gamma$ . Остаётся показать, что все векторы из  $\Gamma$  являются неотрицательными линейными комбинациями векторов из  $R_\Gamma$ . Для каждой образующей  $v \in R \setminus R_\Gamma$  найдётся функционал  $\psi \in R_\Gamma^\vee$

с  $\langle \psi, v \rangle > 0$ . Поэтому такая образующая  $v$  не может входить с положительным коэффициентом в разложение никакого вектора  $w \in \Gamma$  по векторам из  $R$ , ибо на любом векторе  $w \in \Gamma$  все функционалы  $\psi \in R^\vee$  зануляются.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 7.4. Приведите пример, показывающий, что не каждое непустое подмножество  $I \subset R$  порождает конус, являющийся гранью конуса  $\sigma_R$ .

### СЛЕДСТВИЕ 7.8

Для любого набора векторов  $R$  в  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  имеется оборачивающая включения биекция между  $k$ -мерными<sup>1</sup> гранями конуса  $\sigma_R \subset V$  и  $(n - k)$ -мерными гранями двойственного ему конуса  $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$ . Она задаётся правилом  $\Gamma = \sigma_R \cap H_\Gamma = \sigma_{R_\Gamma} \Leftrightarrow \sigma_{R_\Gamma}^\vee = \sigma_{R^\vee} \cap \text{Ann } H_\Gamma = \Gamma^\vee$ .

Доказательство. По упр. 2.15 линейная оболочка множества ковекторов  $R_\Gamma^\vee$  совпадает с двойным аннулятором  $\text{Ann } \text{Ann } (R_\Gamma^\vee) = \text{Ann } H_\Gamma$  и высекает из двойственного конуса  $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$  грань  $\Gamma^\vee = \text{Ann } H_\Gamma \cap \sigma_{R^\vee} = \sigma_{R_\Gamma}^\vee$ , которая по сл. 7.8 является конусом, натянутым на  $R_\Gamma^\vee = \text{Ann } H_\Gamma \cap R^\vee = (\text{Ann } H_\Gamma \cap \sigma_{R^\vee}) \cap R^\vee$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2 В сл. 7.8 не предполагается равенства  $\dim \sigma_R = \dim V$ . Например, одномерный конус  $\sigma_v = \{tv \mid t \geq 0\}$  представляет собою луч, выпущенный из нуля в направлении вектора  $v$  и имеет две грани — нульмерную грань  $o$  и одномерную грань, совпадающую с самим этим лучом. Соответственно, двойственный ему конус  $\sigma_v^\vee = H_v^+ \subset V^*$  представляет собою полупространство и тоже имеет две грани —  $n$ -мерную грань  $\sigma_v^\vee \cap \text{Ann } o = H_v^+ \cap V^* = H_v^+$ , совпадающую с самим этим полупространством, и  $(n - 1)$ -ную грань  $\text{Ann } v = H_v$ , представляющую собою границу этого полупространства.

УПРАЖНЕНИЕ 7.5. Покажите, что для каждой грани  $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma}$  конуса  $\sigma_R$  выполняется равенство  $\sigma_{R_\Gamma} = \sigma \cap (-\sigma_{R_\Gamma}^\vee)$ , где под  $-\sigma = \{v \mid -v \in \sigma\}$  понимается конус, центрально симметричный конусу  $\sigma$  относительно начала координат.

**7.2.2. Асимптотический конус многогранника.** Вектор  $v \in V$  называется *неограниченным направлением* (или *асимптотическим вектором*) многогранника  $M \subset \mathbb{A}(V)$ , если  $M$  содержит хоть один луч  $[p, q]$  с направляющим вектором  $\overrightarrow{pq} = v$ . Нулевой вектор также удобно считать асимптотическим, хотя он и не задаёт никакого направления.

УПРАЖНЕНИЕ 7.6. Покажите, что для того, чтобы вектор  $v \in V$  был асимптотическим, необходимо и достаточно, чтобы  $\forall p \in M \quad p + v \in M$ .

Мы будем называть множество асимптотических векторов многогранник *конусом неограниченных направлений* (или *асимптотическим конусом*) многогранника  $M$  и будем обозначать его  $\sigma_{M_\infty}$ . Покажем, что  $\sigma_{M_\infty}$  действительно является выпуклым многогранным конусом.

<sup>1</sup> $k$  пробегает значения от нуля до  $\dim \sigma_R$ , и под  $\dim \sigma$ -мерной гранью многогранного конуса  $\sigma$  здесь и далее понимается сам этот конус



**Предложение 7.4**

Асимптотический конус  $\sigma_{M_\infty}$  многогранника  $M = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha^+$  это выпуклый многогранный конус в  $V$ , двойственный к конусу  $\sigma_{D_A} \subset V^*$ , порождённому дифференциалами  $D_\alpha$  всех задающих  $M$  функционалов  $\alpha \in A$ .

Доказательство. Выберем нулевую точку  $o \in \mathbb{A}(V)$  в качестве начальной и запишем задающие  $M$  функционалы  $\alpha \in A$  в виде  $\alpha = \psi_\alpha + c_\alpha$ , где  $\psi_\alpha = D_\alpha \in V^*$  и  $c_\alpha = \alpha(o) \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим произвольный вектор  $v \in V$ . Если  $\psi_\alpha(v) < 0$  для какого-то  $\alpha$ , то  $\forall p \in \mathbb{A}(V)$  при  $t \gg 0$  выполняется неравенство

$$\psi_\alpha(p + tv) + c_\alpha = t\psi_\alpha(v) + \psi_\alpha(p) + c_\alpha < 0.$$

Поэтому такой вектор  $v$  не является асимптотическим. Наоборот, если все  $\psi_\alpha(v) \geq 0$ , то для любой точки  $p$ , удовлетворяющей неравенствам  $\psi_\alpha(p) + c_\alpha \geq 0$ , и любого  $t \geq 0$  выполняются неравенства

$$\psi_\alpha(p + tv) + c_\alpha = \psi_\alpha(p) + c_\alpha + t\psi_\alpha(v) \geq \psi_\alpha(p) + c_\alpha \geq 0,$$

означающие, что и весь луч  $p + tv$ ,  $t \geq 0$ , лежит в  $M$ , как только  $p \in M$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 7.7. Пусть  $M = \mathbb{A}^m \times M'$ . Покажите, что  $\sigma_{M_\infty} = \mathbb{A}^m \times \sigma_{M'_\infty}$ .

**7.2.3. Аффинный конус над многогранником.** Конструкция из доказательства сл. 7.6 имеет смысл для любого, в том числе неограниченного многогранника  $M \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ . А именно, рассмотрим  $(n+1)$ -мерное векторное пространство  $\mathbb{R} \oplus V$ , вложим  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  в  $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(\mathbb{R} \oplus V)$  в качестве аффинной гиперплоскости  $\Pi = (1, 0) + V = \{(1, v) \in \mathbb{R} \oplus V \mid v \in V\}$  и обозначим через

$$\bar{\sigma}_M \subset \mathbb{A}(\mathbb{R} \oplus V)$$

замыкание объединения всех лучей  $[o, q]$  с началом в нулевой точке  $o \in \mathbb{A}^{n+1}$  и направляющими точками  $q = (1, p) \in M \subset \Pi$ . Замкнутая выпуклая фигура  $\bar{\sigma}_M$  называется *аффинным конусом* над многогранником  $M \subset \mathbb{A}^n$  в  $\mathbb{A}^{n+1} \supset \mathbb{A}^n$ .

Чтобы убедиться в том, что  $\bar{\sigma}_M$  действительно является полиэдральным конусом, зафиксируем в векторном пространстве  $W = \mathbb{R} \oplus V$  координаты  $x_0, x_1, \dots, x_n$  так, чтобы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  были координатами в  $V$ , а  $x_0$  была координатой вдоль первого слагаемого суммы  $\mathbb{R} \oplus V$ , и будем считать, что многогранник  $M = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha^+$  задаётся в  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  системой линейных неравенств

$$\psi_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + c_\alpha \geq 0, \quad (7-3)$$

где  $\psi_\alpha \in V^*$ ,  $c_\alpha = \alpha(o) \in \mathbb{R}$ , а индекс  $\alpha \in A$  нумерует неравенства.

**Предложение 7.5**

Если  $M$  задаётся в  $\mathbb{A}(V)$  неоднородными неравенствами (7-3), то  $\bar{\sigma}_M$  задаётся в  $\mathbb{A}(\mathbb{R} \oplus V)$  однородными неравенствами

$$x_0 \geq 0 \quad \text{и} \quad \psi_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + c_\alpha x_0 \geq 0, \quad \alpha \in A. \quad (7-4)$$

Доказательство. Временно обозначим через  $K \subset \mathbb{R} \oplus V$  конус, задаваемый неравенствами (7-4), а через  $U \subset \mathbb{R} \oplus V$  — его линейную оболочку. Поскольку при ограничении на аффинную гиперплоскость  $x_0 = 1$  система неравенств (7-4) превращается в систему (7-3),  $K \cap \Pi = M$ . В частности, любой луч  $[o, q)$  с  $q = (1, p) \in M$  лежит в  $K$ , так что  $\bar{\sigma}_M \subset K$ . С другой стороны, любой вектор  $w = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in K$  с  $x_0 \neq 0$  лежит на луче  $[o, q)$ , проходящем через точку

$$q = w/x_0 = (1, x_1/x_0, x_2/x_0, \dots, x_n/x_0) \in K \cap \Pi = M.$$

Так как все внутренние в топологии пространства  $U$  точки  $K$  имеют  $x_0 > 0$  (обязательно убедитесь в этом!), внутренность  $K$  содержится в  $\bar{\sigma}_M$ . Согласно упр. 6.27 на стр. 121, замкнутое выпуклое множество  $K$  является замыканием своей внутренности. Поэтому  $K = \bar{\sigma}_M$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 7.8. Покажите, что вершины многогранника  $M$  — суть точки пересечения гиперплоскости  $\Pi$  с теми одномерными рёбрами конуса  $\bar{\sigma}_M$ , которые не параллельны  $\Pi$ .

#### Предложение 7.6

Асимптотический конус многогранника  $M$  является пересечением аффинного конуса над многогранником  $M \subset \Pi$  с параллельным аффинной гиперплоскости  $\Pi = (1, 0) + V \subset \mathbb{R} \oplus V$  векторным подпространством  $V = (0, 0) + V \subset \mathbb{R} \oplus V$ :

$$\sigma_{M_\infty} = \bar{\sigma}_M \cap V = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \bar{\sigma}_M \mid x_0 = 0\}. \quad (7-5)$$

Доказательство. Согласно предл. 7.5, аффинный конус  $\bar{\sigma}_M$  задаётся в  $\mathbb{R} \oplus V$  однородными неравенствами  $x_0 \geq 0$  и  $\psi_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + c_\alpha x_0 \geq 0$ . Его пересечение с подпространством  $x_0 = 0$  состоит из векторов  $v \in V$ , удовлетворяющих однородным неравенствам  $\psi_\alpha(v) \geq 0$ .  $\square$

#### Теорема 7.2 (теорема Моцкина)

Всякий выпуклый многогранник  $M \subset \mathbb{A}(V)$  имеет вид

$$M = \{p + v \mid p \in \text{conv}(p_1, p_2, \dots, p_m), v \in \sigma_{M_\infty}\} \quad (7-6)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_m \subset \mathbb{A}(V)$  — некоторое конечное множество точек<sup>1</sup>. Наоборот, фигура  $M = \text{conv}(p_1, p_2, \dots, p_m) + \sigma = \{p + v \mid p \in \text{conv}(p_1, p_2, \dots, p_m), v \in \sigma\}$ , построенная по произвольным точкам  $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{A}(V)$  и любому конусу  $\sigma \subset V$ , является выпуклым многогранником с асимптотическим конусом  $\sigma_{M_\infty} = \sigma$  и вершинами, составляющими (возможно, пустое) подмножество в  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ . Многогранник  $M$  ограничен, если и только если  $\sigma_{M_\infty} = 0$ .

<sup>1</sup>если у многогранника нет вершин, то канонически выбрать эти точки нельзя; если же вершины есть, то в качестве  $p_1, p_2, \dots, p_m$  можно взять множество вершин многогранника  $M$ , см. упр. 7.9 ниже

Доказательство. Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{A}(\mathbb{R} \oplus V)$  аффинный конус  $\bar{\sigma}_M$  над многогранником  $M \subset \Pi = (1, 0) + V$ . Он натянут на конечное множество векторов пространства  $\mathbb{R} \oplus V$ . Обозначим через  $v_1, v_2, \dots, v_k$  те из них, что лежат в гиперплоскости  $V \subset \mathbb{R} \oplus V$ , а через  $q_1, q_2, \dots, q_\ell$  — те, что имеют ненулевую координату  $x_0$  и, следовательно, могут быть выбраны так, чтобы  $x_0 = 1$ , т.е. в виде  $q_i = (1, p_i) \in \Pi$ , что мы и будем далее предполагать. Тогда  $M = \bar{\sigma}_M \cap \Pi$  состоит из всех неотрицательных линейных комбинаций

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_\ell u_\ell,$$

имеющих  $x_0(w) = 1$ . Последнее означает, что  $\sum \mu_i = 1$ , т.е. что точка

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_\ell u_\ell = (1, p), \quad \text{где } p \in \text{conv}(p_1, p_2, \dots, p_m).$$

Согласно упр. 7.8 нульмерные грани многогранника  $M = \bar{\sigma}_M \cap \Pi$  суть пересечения одномерных граней конуса  $\bar{\sigma}_M$ , натянутых на векторы  $u_i$ , с гиперплоскостью  $\Pi$ . Это доказывает первое утверждение. Второе и третье утверждения вытекают из того, что фигура (7-6) является пересечением гиперплоскости  $\Pi$  с многогранным конусом в пространстве  $\mathbb{R} \oplus V$ , натянутым на векторы  $q_j = (1, p_j)$  и образующие конуса  $\sigma$ . Поэтому  $M$  является многогранником, его аффинный конус  $\bar{\sigma}_M$  порождается векторами  $q_j$  и образующими конуса  $\sigma$ , его асимптотический конус  $\sigma_{M_\infty} = \bar{\sigma}_M \cap V = \sigma$ , а вершины  $M$  суть пересечения  $\Pi$  с непараллельными  $\Pi$  одномерными гранями  $\bar{\sigma}_M$ . Последние, согласно сл. 7.7, натянуты на некоторые из образующих  $q_j = (1, p_j)$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 7.9. Покажите, что когда многогранник  $M$  не содержит аффинных подпространств положительной размерности, в качестве точек  $p_1, p_2, \dots, p_m$  в разложении (7-6) можно взять множество его вершин.

**7.3. Факторизация и двойственность.** Каждое векторное подпространство  $U$  в векторном пространстве  $W$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  задаёт на  $W$  отношение эквивалентности, объявляющее векторы  $w_1, w_2 \in W$  лежащими в одном классе по модулю  $U$ , если и только если  $w_1 - w_2 \in U$ . Иначе можно сказать, что класс эквивалентности данного вектора  $w \in W$  представляет собою аффинную плоскость  $w + U \subset \mathbb{A}(W)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.10. Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности и что сложение классов и их умножение на числа  $\lambda \in \mathbb{k}$  по правилам

$$[w_1 + U] + [w_2 + U] \stackrel{\text{def}}{=} (w_1 + w_2) + U \quad \text{и} \quad \lambda \cdot [w + U] \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda w) + U \quad (7-7)$$

корректны<sup>1</sup> и удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства.

Векторное пространство классов эквивалентности  $w + U$  с операциями (7-7) называется *фактором* пространства  $W$  по подпространству  $U$  и обозначается  $W/U$ . Нулевым вектором в нём является класс  $0 + U = U \subset W$ .

<sup>1</sup>т.е. не зависят от выбора представителей  $w_1, w_2$  и  $w$  в соответствующих классах

УПРАЖНЕНИЕ 7.11. Проверьте, что отображение факторизации  $W \longrightarrow W/U$ , переводящее вектор  $w \in W$  в класс  $w + U \in W/U$ , линейно и эпиморфно, а подпространство  $U \subset W$  является его ядром.

Из этого упражнения и предл. 2.5 на стр. 38 вытекает, что

$$\dim(W/U) = \dim(W) - \dim(U). \quad (7-8)$$

ПРИМЕР 7.1 (ОБРАЗ ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ)

Образ  $\text{im}(F)$  любого линейного отображения  $F : W \longrightarrow V$  канонически изоморфен фактору пространству  $W/\ker(F)$ . Это ещё одна переформулировка<sup>1</sup> того, что  $F(w_1) = F(w_2)$  тогда и только тогда, когда  $w_1 - w_2 \in \ker(F)$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.7

Пространство  $U^*$ , двойственное к подпространству  $U \subset W$ , канонически изоморфно фактору пространства  $W^*$  по подпространству  $\text{Ann } U \subset W^*$ . Изоморфизм

$$W^*/\text{Ann}(U) \xrightarrow{\sim} U^* : \alpha \mapsto \alpha|_U \quad (7-9)$$

задаётся отображением ограничения  $W^* \longrightarrow U^*$ , которое сопоставляет линейному функционалу  $\alpha : W \longrightarrow \mathbb{k}$  его ограничение на  $U \subset W$ .

Доказательство. Отображение  $W^* \longrightarrow U^*$ , переводящее ковектор  $W \xrightarrow{\alpha} \mathbb{k}$  в его ограничение  $\alpha|_U : U \longrightarrow \mathbb{k}$  линейно и имеет ядром в точности подпространство  $\text{Ann}(U) \subset W^*$ . Поэтому два функционала на  $W$  лежат в одном классе по модулю  $\text{Ann}(U)$  тогда и только тогда, когда их ограничения на подпространство  $U$  одинаковы. С другой стороны, любой линейный функционал  $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{k}$  является ограничением на  $U$  некоторого функционала  $\alpha : W \longrightarrow \mathbb{k}$ . Например, можно взять какое-нибудь дополнительное к  $U$  подпространство  $U' \subset W$ , такое что  $U \oplus U' = W$ , и для каждого  $(u, u') \in U \oplus U'$  положить  $\alpha(u, u') = \varphi(u)$ .  $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.8

Пространство  $(W/U)^*$  линейных форм на фактор пространстве  $W/U$  канонически изоморфно подпространству  $\text{Ann}(U) \subset W^*$ . Изоморфизм

$$\text{Ann}(U) \xrightarrow{\sim} (W/U)^* \quad (7-10)$$

сопоставляет линейному функционалу  $\alpha : W \longrightarrow \mathbb{k}$ , тождественно равному нулю на подпространстве  $U \subset W$ , функцию  $\bar{\alpha} : W/U \longrightarrow \mathbb{k}$ , заданную правилом  $\bar{\alpha}(w + U) = \alpha(w)$ .

Доказательство. Поскольку  $\alpha$  имеет постоянное значение на каждом аффинном подпространстве  $w + U$ , функция  $\bar{\alpha}$  определена корректно.

УПРАЖНЕНИЕ 7.12. Убедитесь, что она линейна и что отображение (7-10), задаваемое правилом  $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$  линейно и инъективно.

<sup>1</sup>ср. с п° 2.3 на стр. 37

Поскольку  $\dim \text{Ann}(U) = \dim(W) - \dim(U) = \dim(W/U)$ , отображение (7-10) является изоморфизмом.  $\square$

**7.3.1. Двойственный оператор.** Со всяким линейным отображением

$$F : L_1 \longrightarrow L_2$$

между векторными пространствами над произвольным полем  $\mathbb{k}$  канонически связано двойственное отображение

$$F^* : L_2^* \xrightarrow{\psi \mapsto \psi \circ F} L_1^* \quad (7-11)$$

переводящее линейную форму  $\psi : L_2 \longrightarrow \mathbb{k}$  в линейную форму  $F^*\psi = \psi \circ F$  на  $L_1$ , значение которой на векторе  $v \in L_1$  есть  $F^*\psi(v) = \psi(Fv)$ . В более симметричных обозначениях (7-1) это записывается равенством

$$\langle F^*\psi, v \rangle = \langle \psi, Fv \rangle \quad \forall v \in L_1 \quad \forall \psi \in L_2^* . \quad (7-12)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 7.13.** Убедитесь, что композиция  $F \circ \psi$  является линейной формой на  $L_1$  и что отображение  $F^*$  линейно.

Из (7-12) немедленно следует, что  $\text{Ann im}(F^*) = \ker F$  и  $\ker(F^*) = \text{Ann im} F$ . Беря в этих равенствах аннуляторы обеих частей, получаем двойственные равенства

$$\text{im}(F^*) = \text{Ann ker} F \quad \text{и} \quad \text{Ann ker}(F^*) = \text{im} F . \quad (7-13)$$

Сравнивая эти соотношения с изоморфизмом из прим. 7.1 и изоморфизмом (7-10), мы заключаем, что  $\text{im} F \subset L_1$  и  $\text{im}(F^*) \subset L_2^*$  являются двойственными друг другу пространствами:  $\text{im} F = \text{Ann ker}(F^*) = (L_1^*/\ker F^*)^* = (\text{im} F^*)^*$ . Спаривание между ними задаётся равенством

$$\langle F^*\psi, Fv \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle F^*\psi, v \rangle = \langle \psi, Fv \rangle \quad (7-14)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 7.14.** Убедитесь непосредственно, что эта формула корректна, т. е. не зависит от выбора ковектора  $\psi \in L_2^*$  и вектора  $v \in L_1$ , использованных для записи элементов из  $\text{im} F^*$  и  $\text{im} F$  соответственно.

По аналогичным причинам подпространство  $\ker F \subset L_1$  двойственно фактор пространству  $L_1^*/\text{im}(F^*)$ , а подпространство  $\ker(F^*) \subset L_2^*$  двойственно фактор пространству  $L_2/\text{im} F$ . Спаривания между ними суть обычные спаривания между векторами и ковекторами в  $L_1$  и в  $L_2$  соответственно.

В силу всего сказанного, фактор по образу линейного отображения  $F$  называется *коядром* этого отображения и обозначается  $\text{coker}(F)$ . Тем самым,

$$(\ker F)^* = \text{coker}(F^*) \quad \text{и} \quad (\text{coker} F)^* = \ker(F^*) .$$

**УПРАЖНЕНИЕ 7.15.** Пусть известна матрица  $F$  в некоторых базисах пространств  $L_1$  и  $L_2$ . Найдите матрицу  $F^*$  в двойственных базисах пространств  $L_2^*$  и  $L_1^*$ .

**7.3.2. Двойственное пространство аффинных функционалов.** Аффинные функционалы

$$\alpha : \mathbb{A}(V) \longrightarrow \mathbb{k}$$

образуют векторное пространство  $W$  размерности  $\dim V + 1$ , поскольку выбирая в  $\mathbb{A}(V)$  начальную точку  $o$ , мы можем однозначно представить каждый аффинный функционал  $\alpha$  в виде  $\alpha = \psi_\alpha + c_\alpha$ , где  $\psi_\alpha = D_\alpha \in V^*$ , а  $c_\alpha = \alpha(o) \in \mathbb{k}$ .

Функционалы, принимающие постоянное значение на всём пространстве  $\mathbb{A}(V)$ , составляют одномерное векторное подпространство  $C \subset W$ , которое мы будем называть *прямой констант*. Эту прямую можно иначе описать как множество всех аффинных функционалов с нулевым дифференциалом:

$$C = \{\alpha \in W \mid D_\alpha = 0\}.$$

Фактор пространство  $W/C$  канонически изоморфно двойственному к  $V$  пространству  $V^*$ . Изоморфизм  $D : W/C \xrightarrow{\sim} V^*$  задаётся сопоставлением аффинному функционалу  $\alpha$  его дифференциала  $D_\alpha$ .

Двойственное к пространству аффинных функционалов на  $\mathbb{A}(V)$  векторное пространство  $W^*$  и ассоциированное с ним аффинное пространство  $\mathbb{A}(W^*)$  тесно связаны с исходным аффинным пространством  $\mathbb{A}(V)$ .

Каждая точка  $p \in \mathbb{A}(V)$  задаёт ненулевой линейный функционал вычисления

$$\text{ev}_p : W \xrightarrow{\alpha \mapsto \alpha(p)} \mathbb{k}. \quad (7-15)$$

Сопоставляя точкам  $p \in \mathbb{A}(V)$  их функционалы вычисления  $\text{ev}_p \in W^*$ , мы получаем вложение

$$\text{Ev} : \mathbb{A}(V) \hookrightarrow \mathbb{A}(W^*) \xrightarrow{p \mapsto \text{ev}_p} W^*. \quad (7-16)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 7.16.** Убедитесь в том, что разным точкам отвечают разные функционалы вычисления.

Вложение (7-16) *аффинно*, поскольку разность любых двух его значений

$$\text{Ev}(q) - \text{Ev}(p) : \alpha \mapsto \alpha(q) - \alpha(p) = D_\alpha(\vec{pq}) = \text{ev}_{\vec{pq}}(D_\alpha)$$

представляет собою результат применения к вектору  $\vec{pq} \in V$  *линейного* отображения

$$\text{ev}_v \circ D : V \hookrightarrow W \xrightarrow{v \mapsto \text{ev}_v \circ D} W^*, \quad (7-17)$$

сопоставляющего каждому вектору  $v \in V$  функционал вычисления значений дифференциалов аффинных функционалов  $\alpha \in W$  на этом векторе:

$$\text{ev}_v \circ D : \left( \mathbb{A}(V) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{k} \right) \longmapsto \text{ev}_v(D_\alpha) = D_\alpha(v) = \alpha(p+v) - \alpha(p)$$

(где справа  $p \in \mathbb{A}(V)$  — произвольная точка).

УПРАЖНЕНИЕ 7.17. Убедитесь, что это правило корректно задаёт *линейное вложение* векторного пространства  $V$  векторное пространство  $W^*$ .

Линейное вложение (7-17) отождествляет векторное пространство  $V$  с аннулятором  $\text{Ann } C \subset W^*$  прямой констант  $C \subset W$ . Последний имеет в  $W^*$  коразмерность 1 и задаётся одним линейным однородным уравнением

$$V \simeq \text{Ann } C = \{w \in W^* \mid \langle w, 1 \rangle = 0\}, \quad (7-18)$$

где  $\langle w, 1 \rangle = w(1)$  есть значение линейной формы  $w \in W^*$  на единичном аффинном функционале  $1 \in W$ . Мы будем называть векторное подпространство (7-18) *гиперплоскостью векторов*, поскольку оно образовано функционалами вычисления дифференциалов аффинных функционалов  $\alpha \in W$  на *векторах* пространства  $V$ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.18. Убедитесь в том, что отображение  $D_{E_V} = \text{ev}_v \circ D$  есть композиция канонического изоморфизма  $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$  из форм. (2-12) на стр. 40, изоморфизма  $D^* : V^{**} \xrightarrow{\sim} (W/C)^*$ , двойственного к взятию дифференциала  $D : W/C \xrightarrow{\sim} V^*$ , и канонического изоморфизма  $(W/C)^* \xrightarrow{\sim} \text{Ann } C$  из форм. (7-10) на стр. 138.

Аффинное отображение (7-16) вкладывает аффинное пространство  $\mathbb{A}(V)$  в аффинное пространство  $\mathbb{A}(W^*)$  в качестве не проходящей через нуль аффинной гиперплоскости, которую мы будем обозначать  $\Pi_V \subset \mathbb{A}(W)$  и называть *гиперплоскостью точек*, поскольку она образована функционалами вычисления аффинных функционалов  $\alpha \in W$  на точках пространства  $\mathbb{A}(V)$ . Гиперплоскость точек задаётся в  $\mathbb{A}(W^*)$  одним линейным неоднородным уравнением

$$\Pi_V = \{w \in W^* \mid \langle w, 1 \rangle = 1\}. \quad (7-19)$$

Она *параллельна* гиперплоскости векторов  $V \simeq \text{Ann } C \subset W^*$ .

**7.3.3. Приложения к многогранникам.** Вернёмся к полю  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ . С любым конечным множеством аффинных функционалов  $A \subset W$  связаны:

- конус  $\sigma_A \subset W$ , порождённый множеством  $A$ ;
- многогранник  $M = M_A = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha^+ \subset \mathbb{A}(V)$  (возможно, совпадающий со всем пространством  $\mathbb{A}(V)$  или пустой);
- множество  $\sigma_M = \{\eta \in W \mid M \subset H_\eta^+\}$  всех функционалов, принимающих неотрицательные значения на многограннике  $M_A$ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.19. Убедитесь в том, что двойственный к  $\sigma_A$  конус  $\sigma_A^\vee \subset W^*$

- а) пересекает гиперплоскость точек (7-19) по многограннику, который является образом многогранника  $M$  при вложении (7-16)
- б) пересекает гиперплоскость векторов (7-18) по конусу, который является образом асимптотического конуса многогранника  $M$  при вложении (7-17).

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.9

Если  $M = M_A \neq \emptyset$  и  $1 \in A$ , то  $\sigma_M = \sigma_A$ .

Доказательство. Включение  $\sigma_A \subset \sigma_M$  очевидно. Докажем, что  $\sigma_M \subset \sigma_A$ . Пусть  $\eta \in W$  не лежит в  $\sigma_A$ . По лемме Фаркаша найдётся  $w \in \sigma_A^\vee \subset W^*$ , такой что  $\langle w, \eta \rangle < 0$ . Так как  $1 \in A$ , возможны два случая: либо  $\langle w, 1 \rangle > 0$ , либо  $\langle w, 1 \rangle = 0$ .

В первом случае, деля  $w$  на положительную константу  $\langle w, 1 \rangle$ , мы можем считать его лежащим в гиперплоскости точек (7-19). Тогда  $w = ev_p \in \Pi_V \cap \sigma_A^\vee$  является функционалом вычисления в некоторой точке  $p \in M$ , и неравенство  $\eta(p) = \langle w, \eta \rangle < 0$  означает, что  $M \not\subset H_\eta^+$  и  $\eta \notin \sigma_M$ .

Во втором случае,  $w \in V \cap \sigma_A^\vee$  лежит в гиперплоскости векторов и является функционалом вычисления дифференциалов элементов из  $W$  на некотором векторе  $v$  из асимптотического конуса многогранника  $M$ . Поскольку

$$\langle w, \eta \rangle = D_\eta(v) < 0$$

ограничение функционала  $\eta$  на любой луч  $p + vt \subset M$  становится при  $t \gg 0$  отрицательным. Так что и в этом случае  $M \not\subset H_\eta^+$  и  $\eta \notin \sigma_M$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 7.20. Убедитесь, что а)  $M = \bigcap_{\eta \in \sigma_M} H_\eta^+$  б)  $M = \emptyset \iff \sigma_M = W$   
в)  $M = \mathbb{A}(V) \iff \sigma_M = C_{\geq 0}$  есть луч неотрицательных констант.

## СЛЕДСТВИЕ 7.9

Для любого конечного множества  $A \subset W$  множество  $\sigma_{M_A} \subset W$  является выпуклым многогранным конусом. Если  $M$  непуст и отличен от  $\mathbb{A}(V)$ , конус  $\sigma_M$  порождается функционалами, задающими гиперграни многогранника  $M$ , и единичным функционалом 1.

Доказательство. Поскольку присоединение к множеству  $A$  единичного функционала никак не влияет на многогранник  $M$ , первое утверждение следует прямо из предл. 7.9 и упр. 7.20. Для доказательства второго утверждения сначала выкинем из  $A$  все функционалы, не пересекающие гиперграней многогранника  $M$  (по сл. 7.4 это не изменит  $M$ ), а затем добавим к  $A$  функционал 1 и воспользуемся предл. 7.9.  $\square$

**7.4. Линейная оптимизация.** Задача линейной оптимизации заключается в отыскании минимума заданной однородной линейной формы  $\varphi \in V^*$  на данном многограннике  $M = \bigcap_{\eta \in \sigma_M} H_\eta^+ \subset \mathbb{A}(V)$ , а также точек  $p \in M$ , в которых он достигается, или в выяснении того, что  $\varphi$  неограничена на  $M$  снизу.

Аналогичная задача о максимуме формально сводится к задаче про минимум сменой знака:  $\max \varphi = -\min(-\varphi)$ .

Зафиксируем начало отсчёта в нуле  $o \in \mathbb{A}(V)$  и запишем задающие  $M$  функционалы  $\alpha \in A \subset W$  в виде  $\alpha = \psi_\alpha + c_\alpha$ , где  $\psi_\alpha = D_\alpha \in V^*$  и  $c_\alpha = \alpha(o) \in \mathbb{R}$ .



## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.10

Пусть многогранник  $M = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha^+ \subset \mathbb{A}(V)$  непуст и все задающие его функционалы  $\alpha \in A$  имеют ненулевые дифференциалы  $\psi_\alpha \in V^*$ . Форма  $\varphi \in V^*$  ограничена на  $M$  снизу тогда и только тогда, когда  $\varphi \in \sigma_{M_\infty}^\vee$ , т. е. когда

$$\varphi = \sum_{\alpha \in A} y_\alpha \cdot \psi_\alpha \quad c y_\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (7-20)$$

В этом случае

$$\min_{p \in M} \varphi(p) = - \min_y \sum_{\alpha \in A} c_\alpha y_\alpha, \quad (7-21)$$

где минимум справа берётся по всем наборам коэффициентов  $y_\alpha \geq 0$ , дающим разложения (7-20). Множество точек  $p \in M$ , на которых достигается минимум в левой части (7-21), всегда представляет собою некую грань  $\Gamma_\varphi$  многогранника  $M$ , и в каждом разложении (7-20), на котором достигается минимум в правой части (7-21) ненулевые  $y_\alpha \neq 0$  могут встретиться только для

$$\alpha \in A_{\Gamma_\varphi} = \{\alpha \in A \mid H_\alpha \supset \Gamma_\varphi\}.$$

Доказательство. Положим  $A' = A \sqcup \{1\}$ . Расширение  $A$  до  $A'$  не изменяет  $M$ . Число  $m \in \mathbb{R}$  является нижней границей для  $\varphi$  на многограннике  $M$ , если и только если  $M \subset H_{\varphi-m}^+$ . По предл. 7.9 последнее означает, что  $\eta - m \in \sigma_{A'}$ , т. е. что существуют неотрицательные числа  $y_\alpha$  и  $z$ , такие что

$$\varphi - m = z \cdot 1 + \sum_{\alpha \in A} y_\alpha \cdot \alpha = \sum_{\alpha \in A} y_\alpha \cdot \psi_\alpha + z + \sum_{\alpha \in A} y_\alpha \cdot c_\alpha,$$

что доказывает первое утверждение предложения. Для доказательства равенства (7-21) заметим, что любое разложение (7-20) можно переписать в виде

$$\varphi + \sum_{\alpha \in A} y_\alpha \cdot c_\alpha = \sum_{\alpha \in A} y_\alpha \cdot \alpha.$$

Поэтому число  $-\sum_{\alpha \in A} y_\alpha \cdot c_\alpha$ , полученное по коэффициентам любого разложения (7-20), всегда является нижней границей для  $\varphi$  на  $M$ , и максимальная нижняя граница  $m_*$  формы  $\varphi$  на  $M$  заведомо *не меньше*

$$\max_y \left( - \sum_{\alpha \in A} y_\alpha \cdot c_\alpha \right) = - \min_y \sum_{\alpha \in A} c_\alpha y_\alpha. \quad (7-22)$$

С другой стороны, максимальная нижняя граница  $m_*$  равна минимуму формы  $\varphi$  на  $M$ , и функционал  $\varphi - m_*$  является для  $M$  опорным. Поэтому множество точек  $p \in M$ , в которых  $\varphi = m_*$ , образует грань

$$\Gamma_\varphi = H_{\varphi-m_*} \cap M$$

многогранника  $M$ . Так как любой функционал  $\alpha \notin A'_{\Gamma_\varphi}$  строго положителен в некоторой точке грани  $\Gamma_\varphi$ , а  $(\varphi - m_*)|_{\Gamma} \equiv 0$ , такой  $\alpha$  не может входить с положительным коэффициентом ни в какое разложение

$$\varphi - m_* = z \cdot 1 + \sum_{\alpha \in A} y_\alpha \cdot \alpha. \quad (7-23)$$

В частности, в любом таком разложении  $z = 0$ , так что минимум  $m_*$  функционала  $\varphi$  на  $M$  представляется в виде

$$m_* = - \sum_{\alpha \in A_{\Gamma_\varphi}} y_\alpha \cdot c_\alpha \quad \text{с} \quad y_\alpha \geq 0. \quad (7-24)$$

Из этого вытекает, что набор коэффициентов  $y_\alpha$  в правой части (7-24), дополненный нулевыми значениями  $y_\alpha = 0$  при  $\alpha \notin A_{\Gamma_\varphi}$ , реализует максимум (7-22), а значит, и минимум в правой части (7-21). Это доказывает равенство (7-21).

Записывая произвольное разложение  $\varphi = \sum_{\alpha \in A} y_\alpha \psi_\alpha$  с  $\sum_{\alpha \in A} y_\alpha c_\alpha = -m_*$  в виде (7-23), куда никакой из функционалов  $\alpha \notin A_{\Gamma_\varphi}$  не может входить с положительным коэффициентом, убеждаемся, что  $y_\alpha = 0$  при  $\alpha \notin A_{\Gamma_\varphi}$ .  $\square$

#### Следствие 7.10

Если правая часть (7-21) достигает минимума на наборе  $y_\alpha$  с множеством ненулевых компонент  $A_\varphi = \{\alpha \in A \mid y_\alpha \neq 0\}$ , то минимум в левой части (7-21) достигается на (автоматически непустой) грани  $M \cap H_{A_\varphi}$ .

Доказательство. Пусть, как и выше,  $m_* = \min_{p \in M} \varphi(p) = - \min_y \sum_{\alpha \in A} c_\alpha y_\alpha$ . Из условия вытекает, что  $\varphi - m_* = \sum_{\alpha \in A_f} y_\alpha \cdot \alpha$ . Если  $M \cap H_{A_\varphi} = \emptyset$ , то правая часть этого разложения строго положительна на всём многограннике, что невозможно, поскольку левая часть обращается в нуль на грани, где форма  $\varphi$  достигает своего минимального значения  $m_*$ . Поэтому  $M \cap H_{A_\varphi} \neq \emptyset$  и  $0 = \min_M \varphi - m_* = \min_M \sum_{\alpha \in A_f} y_\alpha \cdot \alpha$  достигается в точности на грани  $M \cap H_{A_\varphi}$ .  $\square$