

§11. Соответствия на прямых и кониках

11.1. Гомографии. Многие геометрические задачи так или иначе связаны с соответствиями между точками одной проективной прямой и точками другой проективной прямой, такими что координаты соответственных точек *алгебраически* выражаются друг через друга. Простейшими такими соответствиями являются рациональные биекции, или *гомографии*.

ЛЕММА 11.1

Если над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} имеется биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\},$$

которое в некоторой аффинной карте с аффинной координатой t может быть задано формулой

$$t \mapsto \varphi(t) = g(t)/h(t), \quad \text{где } g, h \in \mathbb{k}[t], \quad (11-1)$$

то φ является дробно линейным изоморфизмом (и, в частности, однозначно продолжается на всю прямую).

Доказательство. В однородных координатах $(x_0 : x_1)$, для которых $t = x_0/x_1$, формула (11-1), задающая отображение φ , может быть переписана¹ в виде

$$\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto (F(x_0, x_1) : G(x_0, x_1)),$$

где F и G не пропорциональные друг другу однородные многочлены от (x_0, x_1) одинаковой степени $d = \deg F = \deg G$. Обозначим проективизацию пространства однородных многочленов степени d от (x_0, x_1) через \mathbb{P}_d . Если точка $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$ имеет при отображении φ ровно один прообраз, то однородный многочлен $\vartheta_1 \cdot F(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot G(x_0, x_1)$ имеет на \mathbb{P}_1 ровно один корень $x = \varphi^{-1}(\vartheta)$, который над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} автоматически является d -кратным, так что соответствующая точка $\vartheta_1 F(x) - \vartheta_0 G(x)$ лежит в на кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ из прим. 9.4 на стр. 158. Поскольку поле \mathbb{k} бесконечно, а отображение φ биективно вне конечного множества точек, кривая C_d и прямая $(F, G) \subset \mathbb{P}_d$ имеют бесконечно много точек пересечения. Но в (прим. 9.4) мы видели, что при $d \geq 2$ никакие три точки кривой C_d не лежат на одной прямой. Поэтому $d = 1$ и $\varphi \in \text{PGL}_2(\mathbb{k})$. \square

11.1.1. Геометрическая классификация гомографий. Пусть прямые

$$\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$$

¹возможно, после некоторой модификации конечного множества, на котором отображение φ не определено

пересекаются в точке $q = \ell_1 \cap \ell_2$, и пусть дробно линейный изоморфизм

$$\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$$

переводит три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$, отличные от q , в точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$. Тогда возможны два случая, представленные на рис. 11◊1 и рис. 11◊2: либо три прямые (a_1, a_2) , (b_1, b_2) и (c_1, c_2) , соединяющие соответственные точки, проходят через одну точку p , либо — не проходят через одну точку.

В первом случае φ является центральной проекцией из точки p и переводит точку $x \in \ell_1$ в точку $\ell_2 \cap (p, x)$. Действительно, такая проекция удовлетворяет условиям леммы (лем. 11.1), т. е. является дробно линейным изоморфизмом из ℓ_1 в ℓ_2 , и совпадает с φ на трёх точках a_1, b_1, c_1 . Такая гомография называется *перспективой* с центром в p и обозначается γ_p .

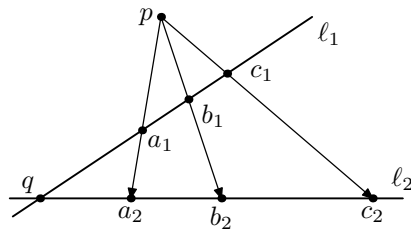


Рис. 11◊1. Перспектива γ_p .

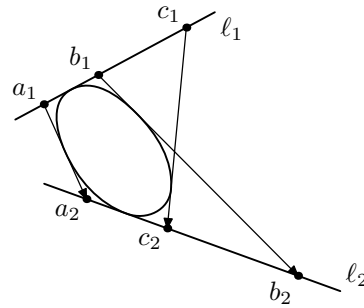


Рис. 11◊2. Гомография γ_C .

Во втором случае никакие три из прямых ℓ_1, ℓ_2 и $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ не пересекаются в одной точке. По следствию (сл. 10.7) существует единственная (автоматически гладкая) коника C , касающаяся всех пяти этих прямых. Преобразование $\gamma_C : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$, переводящее точку $x \in \ell_1$ в точку пересечения $\ell_x \cap \ell_2$, где ℓ_x — отличная от ℓ_1 касательная, опущенная из x на C , является дробно линейным изоморфизмом ℓ_1 на ℓ_2 , поскольку оно биективно и в координатах задаётся рациональной алгебраической формулой: уравнения двух касательных, опущенных из x на C — это точки пересечения двойственной коники $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ с прямой $x^\times = \text{Ann}(x)$; одна из них — уравнение прямой ℓ_1 — дана, так что вторая — уравнение прямой (x, y) — рационально через неё выражается. Так как γ_C и φ одинаково действуют на a_1, b_1, c_1 , имеем равенство $\varphi = \gamma_C$. Отметим, что $\gamma_C(\ell_1 \cap C) = q$ и $\gamma_C(q) = \ell_2 \cap C$.

Итак, каждая гомография либо является перспективой γ_p , либо высекается семейством касательных к некоторой гладкой конике, т. е. имеет вид γ_C . В обоих случаях центр p и коника C определяются по гомографии *однозначно*. Перспектива может рассматриваться как вырожденный случай гомографии γ_C , отвечающий особой конике C , распавшейся в объединение двух прямых, пересекающихся в центре перспективы (сами прямые могут в этом случае

выбираться многими способами — подойдут любые две прямые, соединяющие соответственные точки гомографии).

УПРАЖНЕНИЕ 11.1. Покажите, что гомография $\varphi : l_1 \xrightarrow{\sim} l_2$ является перспективой тогда и только тогда, когда она переводит точку пересечения прямых $l_1 \cap l_2$ в себя.

11.1.2. Перекрёстная ось гомографии. Гомография $\varphi : l_1 \xrightarrow{\sim} l_2$, переводящая три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in l_1 \setminus l_2$ в точки $a_2, b_2, c_2 \in l_2$ является композицией $\varphi = \gamma_{b_1} \circ \gamma_{b_2}$ перспективы $\gamma_{b_2} : l_1 \longrightarrow \ell$ и перспективы $\gamma_{b_1} : \ell \longrightarrow l_2$, где прямая ℓ соединяет точки пересечения двух пар «перекрёстных» прямых $(a_1, b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1, b_2) \cap (b_1, c_2)$ (см. рис. 11◊3).

УПРАЖНЕНИЕ 11.2. Убедитесь, что φ и $\gamma_{b_1} \circ \gamma_{b_2}$ одинаково действуют на a_1, b_1, c_1 . Из этого равенства вытекает, что $(b_1, \varphi(x)) \cap (x, b_2) \in \ell$ для любого $x \in l_1$, что позволяет одной линейкой построить образ $\varphi(x)$ любой точки $x \in l_1$, если известно действие φ на какие-нибудь три точки (см. рис. 11◊3): проводим прямую ℓ и берём в качестве $\varphi(x)$ точку пересечения прямой l_2 с прямой, соединяющей точки b_1 и $\ell \cap (x, b_2)$.

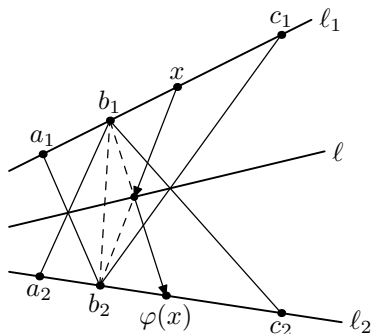


Рис. 11◊3. $\varphi = \gamma_{b_1} \circ \gamma_{b_2}$.

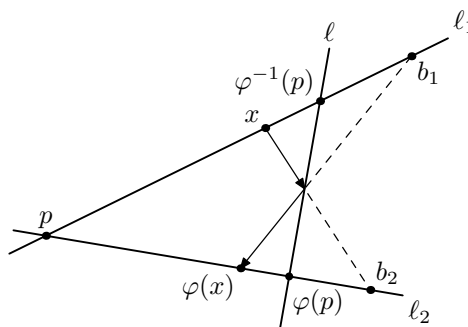


Рис. 11◊4. $\varphi(l \cap l_1) = p$ и $\varphi(p) = l \cap l_2$.

В частности, полагая $x = p = l_1 \cap l_2$, получаем $\varphi(p) = l \cap l_2 = \varphi(p)$, а полагая $x = l \cap l_1$, получаем $\varphi(l \cap l_1) = p$ (см. рис. 11◊4). Поэтому при $\varphi(p) \neq p$ прямая $\ell = (\varphi^{-1}(p), \varphi(p))$ не зависит от выбора точек a_1, b_1, c_1 и является ГМТ пересечения *всевозможных* перекрёстных прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ с $x, y \in l_1$. По этой причине она называется *перекрёстной осью* дробно линейного изоморфизма φ .

УПРАЖНЕНИЕ 11.3. Покажите, что у перспектив (т.е. таких φ , что $\varphi(p) = p$) перекрёстная ось тоже имеется и проходит через $p = l_1 \cap l_2$.

11.1.3. Двойственный язык: гомографии между пучками. Гомография $\varphi : l_1 \longrightarrow l_2$ между прямыми $l_1 = \text{Ann}(p_1)$ и $l_2 = \text{Ann}(p_2)$, лежащими на двойственной плоскости \mathbb{P}_2^\times , в терминах исходной плоскости \mathbb{P}_2 является дробно линейным изоморфизмом пучка прямых p_1^\times , проходящих через точку $p_1 = \text{Ann}(l_1) \in \mathbb{P}_2$ с пучком прямых p_2^\times , проходящих через точку $p_2 = \text{Ann}(l_2) \in \mathbb{P}_2$. Точки $a_1, b_1, c_1 \in l_1$ превращаются при этом в прямые $a_1^\times, b_1^\times, c_1^\times$ из пучка p_1^\times , а их образы $a_2, b_2, c_2 \in l_2$ — в прямые $a_2^\times, b_2^\times, c_2^\times$ из пучка p_2^\times .

Гомография между пучками прямых p_1^\times и p_2^\times на \mathbb{P}_2 однозначно задаётся тремя точками $a = a_1^\times \cap a_2^\times = (a_1, a_2)^\times$, $b = b_1^\times \cap b_2^\times = (b_1, b_2)^\times$, $c = c_1^\times \cap c_2^\times = (c_1, c_2)^\times$ и переводит прямые (p_1, a) , (p_1, b) , $(p_1, c) \in p_1^\times$ в прямые (p_2, a) , (p_2, b) , $(p_2, c) \in p_2^\times$ (см. рис. 11◊6). Мы будем обозначать такую гомографию γ_{abc} .

УПРАЖНЕНИЕ 11.4. Убедитесь, что никакие 4 из пяти точек p_1, p_2, a, b, c не лежат на одной прямой.

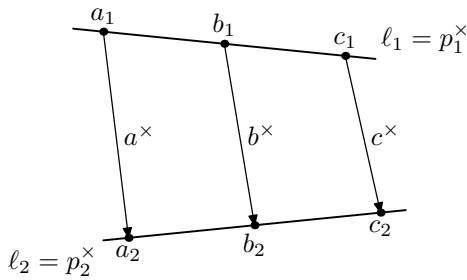


Рис. 11◊5. Гомография на \mathbb{P}_2^\times .

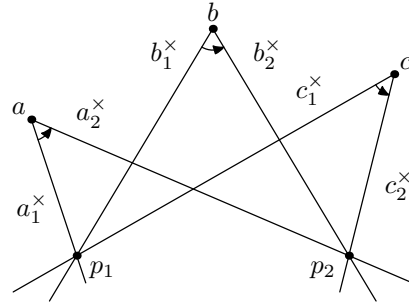


Рис. 11◊6. Гомография $p_1^\times \xrightarrow{\gamma_{abc}} p_2^\times$ пучков на \mathbb{P}_2 .

Через точки p_1, p_2, a, b, c проходит единственная коника C . Если точки a, b, c коллинеарны (как на рис. 11◊7) или одна из точек a, b, c попала на прямую (p_1, p_2) , то коника C распадается в объединение прямой (p_1, p_2) и ещё одной прямой ℓ . В этом случае γ_{abc} переводит прямую (p_1, x) с $x \in \ell$ в прямую (p_2, x) (см. рис. 11◊7), и соответствующая гомография $\varphi : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ на \mathbb{P}_2^\times является перспективой с центром в точке $\ell^\times \in \mathbb{P}_2^\times$. Мы будем обозначать такой изоморфизм γ_{abc} через $\gamma_\ell : p_1^\times \longrightarrow p_2^\times$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.5. Убедитесь, что $C = \ell \cup (p_1, p_2) \iff \gamma_{abc}((p_1, p_2)) = (p_1, p_2)$.

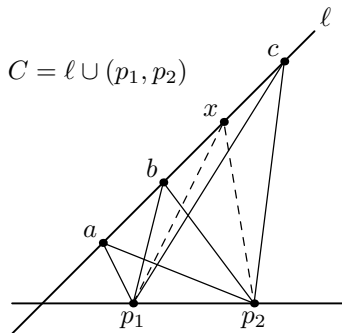


Рис. 11◊7. $\gamma_{abc} = \gamma_C$.

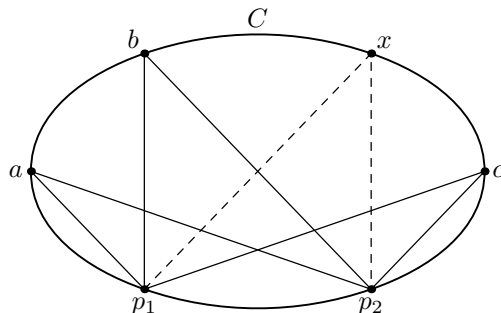


Рис. 11◊8. $\gamma_{abc} = \gamma_\ell$.

В общем же случае коника C невырождена, и $\varphi : p_1^\times \longrightarrow p_2^\times$ переводит прямую (p_1, x) с $x \in C$ в прямую (p_2, x) (см. рис. 11◊8). Мы будем обозначать такую гомографию пучков через γ_C . Отметим, что $\gamma_C((p_1, p_2)) = T_{p_2}C$ и $\gamma_C(T_{p_1}C) =$

(p_1, p_2) . На двойственной плоскости \mathbb{P}_2^\times соответствующее преобразование высекается касательными к двойственной конике: $\varphi = \gamma_C : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$.

Подчеркнём, что как прямая ℓ , так и коника C однозначно определяются по гомографии $\gamma_{abc} : p_1^\times \longrightarrow p_2^\times$ как ГМТ пересечения соответственных прямых $\ell' \cap \gamma_{abc}(\ell')$, где ℓ' пробегает пучок p_1^\times .

УПРАЖНЕНИЕ 11.6. Покажите, что для любого дробно линейного изоморфизма $\varphi : p_1^\times \longrightarrow p_2^\times$ существует точка, в которой пересекаются все прямые, соединяющие пары точек пересечений $\ell' \cap \varphi(\ell'')$ и $\ell'' \cap \varphi(\ell')$, где $\ell', \ell'' \in p_1^\times$.

11.1.4. Гомографии параметризованных пучков. Пучок прямых с центром в точке p_1 можно запараметризовать точками какой-нибудь не проходящей через p_1 прямой ℓ_1 , сопоставляя каждой точке $x \in \ell_1$ прямую (p_1, x) . Аналогично, пучок прямых p_2^\times можно запараметризовать точками какой-нибудь прямой $\ell_2 \not\ni p_2$. После этого любую гомографию $\varphi : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ можно воспринимать как гомографию между пучками $\varphi : p_1^\times \longrightarrow p_2^\times$, и наоборот.

Таким образом, для любой гомографии $\varphi : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ и любой пары точек $p_1, p_2 \notin \ell_1 \cup \ell_2$ ГМТ пересечения соответственных прямых $(p_1, x) \cap (p_2, \varphi(x))$, где x пробегает ℓ_1 , является либо гладкой коникой C , проходящей через точки p_1 и p_2 , либо некоторой прямой ℓ . Последнее равносильно тому, что $\varphi((p_1, p_2) \cap \ell_1) = (p_1, p_2) \cap \ell_2$, и может восприниматься как вырождение первого, отвечающее распавшейся конике $C = \ell \cup (p_1, p_2)$.

Иными словами, всякая гомография

$$\varphi : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$$

раскладывается (многими способами) в композицию проекции прямой ℓ_1 на некоторую конику C из точки $p_1 \in C$ и, затем, проекции коники C на ℓ_2 из другой точки $p_2 \in C$ (см. рис. 11◊8). Мы будем обозначать такую композицию через $\gamma_{p_2 C p_1} : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.7. Покажите, что для любой гомографии $\varphi : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ точки p_1 и p_2 всегда можно подобрать так, чтобы в разложении $\varphi = \gamma_{p_2 C p_1}$ коника C была гладкой.

ПРИМЕР 11.1 (вписанно-описанные треугольники)

Покажем, что два треугольника $A_1 B_1 C_1$ и $A_2 B_2 C_2$ вписаны в одну и ту же гладкую конику Q' , если и только если они описаны вокруг одной и той же гладкой коники Q'' . Поскольку эти две импликации проективно двойственны друг другу, достаточно проверить только одну из них. Пусть 6 точек $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ лежат на одной конике Q' (см. рис. 11◊10). Гомография $\gamma_{C_1 Q' C_2} : (A_1 C_1) \longrightarrow (A_2 C_2)$ переводит $A_1 \mapsto M, K \mapsto B_2, L \mapsto A_2, B_1 \mapsto N$ и не является перспективой. Значит, она задаётся семейством касательных к

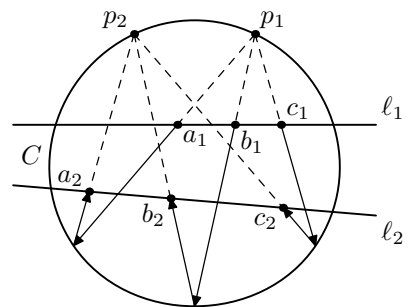


Рис. 11◊9. Гомография $\gamma_{p_2 C p_1}$.

некоторой гладкой конике Q'' , которая вписана в оба треугольника, что и требовалось.

Отметим, что если пара коник Q' и Q'' такова, что существует хоть один треугольник $A_1B_1C_1$, одновременно вписанный в Q' и описанный около Q'' , то такой же треугольник $A_2B_2C_2$ (одновременно вписанный в Q' и описанный около Q'') можно нарисовать стартовав с любой точки $A_2 \in Q'$.

В самом деле, проведём из A_2 две касательных (A_2B_2) и (A_2C_2) к конике Q'' до их пересечения с Q' в точках $B_2, C_2 \in Q'$, как на рис. 11◊10. По доказанному, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ будут описаны вокруг некоторой коники, а поскольку существует лишь одна коника, касающаяся пяти прямых (AB) , (BC) , (CA) , (A_2B_2) , (A_2C_2) , эта коника и есть Q'' .

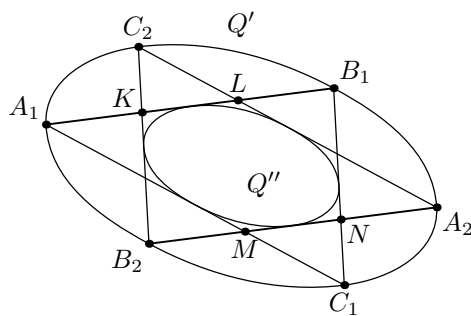


Рис. 11◊10. Вписанно-описанные треугольники.

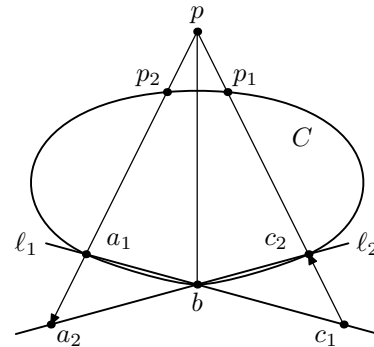


Рис. 11◊11. $\gamma_p = \gamma_{p_2Cp_1}$.

11.2. Гексограмма Паскаля. Перспектива $\gamma_p : l_1 \longrightarrow l_2$ (т. е. проекция l_1 на l_2 из точки $p \notin l_1 \cup l_2$) представляется в виде $\gamma_p = \gamma_{p_2Cp_1}$, как показано на рис. 11◊11: проведём любую конику C через точку пересечения $b = l_1 \cap l_2$ и любые две точки $a_1 \in l_1$ и $c_2 \in l_2$, отличные от b , и возьмём $p_1 = (pc_2) \cap C$ и $p_2 = (pa_1) \cap C$. Из рис. 11◊11 очевидно, что $\gamma_{p_2Cp_1}$ и γ_p одинаково действуют на три точки a_1, b и c_1 . Равенство $\gamma_p = \gamma_{p_2Cp_1}$ имеет много замечательных следствий.

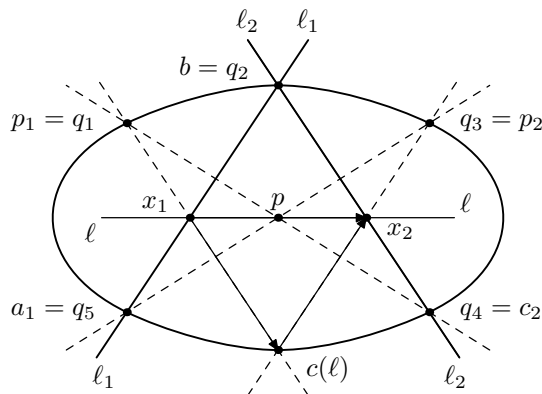


Рис. 11◊12. Построение коники линейкой.

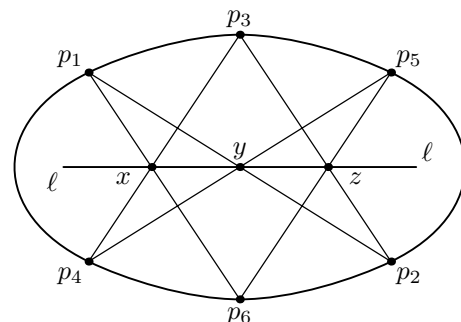


Рис. 11◊13. Гексограмма Паскаля.

ПРИМЕР 11.2 (ПОСТРОЕНИЕ КОНИКИ ЛИНЕЙКОЙ)

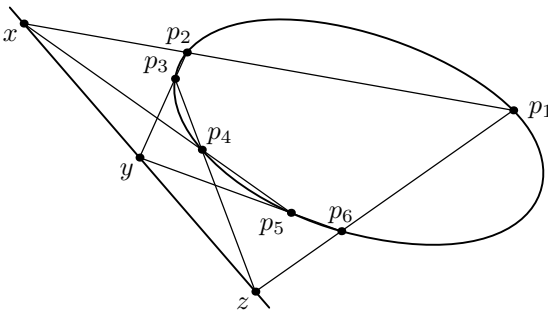
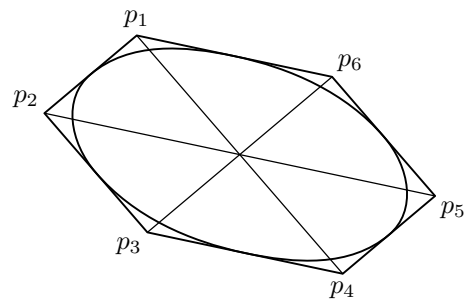
Если заданы пять точек q_1, q_2, \dots, q_5 , никакие 3 из которых не коллинеарны, то при помощи линейки можно эффективно построить сколь угодно плотное множество точек на проходящей через эти пять точек конике C (см. рис. 11◊12).

А именно, приведём рис. 11◊12 и рис. 11◊11 в соответствие друг с другом, полагая $p_1 = q_1$, $p_2 = q_3$, $b = q_2$, $a_1 = q_5$, $c_2 = q_5$. Тогда проекция прямой $\ell_1 = (q_2, q_5) = (a_1, b)$ на прямую $\ell_2 = (q_2, q_4) = (b, c_2)$ из точки $p = (q_1 q_4) \cap (q_3 q_5)$ будет совпадать с композицией проекции $\gamma_{q_1} : \ell_1 \xrightarrow{\sim} C$ и проекции $\gamma_{q_3} : C \xrightarrow{\sim} \ell_2$. Поскольку для любой прямой ℓ , проходящей через p , точка $x_1 = \ell \cap \ell_1$ переводится при этом в точку $x_2 = \ell \cap \ell_2$, точка пересечения прямых $(x_1 q_1) \cap (x_2 q_3) \in C$ лежит на C , и ровно один раз пробежит C , когда ℓ пробежит пучок прямых, проходящих через p .

ТЕОРЕМА 11.1 (ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ)

Шесть точек p_1, p_2, \dots, p_6 тогда и только тогда лежат на одной конике, когда коллинеарны три точки $x = (p_3 p_4) \cap (p_6 p_1)$, $y = (p_1 p_2) \cap (p_4 p_5)$ и $z = (p_2 p_3) \cap (p_5 p_6)$, в которых пересекаются пары «противоположных сторон» шестиугольника p_1, p_2, \dots, p_6 (см. рис. 11◊13 и рис. 11◊14).

Доказательство. Сопоставляя рис. 11◊13 с рис. 11◊12 видим, что если точки x, y, z коллинеарны, то точка $p_6 = (p_1 x) = (p_5 z)$ лежит на конике C , проходящей через точки p_1, p_2, \dots, p_5 , поскольку точка z является в этом случае образом точки x при центральной проекции прямой $\ell_1 = (p_3 p_4)$ на прямую $\ell_2 = (p_3 p_2)$ из точки y , а эта проекция раскладывается в композицию проекций $\gamma_{p_1} : \ell_1 \xrightarrow{\sim} C$ и проекции $\gamma_{p_5} : C \xrightarrow{\sim} \ell_2$. Наоборот, если все шесть точек p_1, p_2, \dots, p_6 лежат на некоторой конике C , то точка z является образом точки x при гомографии $\gamma_C^{p_5 p_1} : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$, а поскольку эта гомография совпадает с проекцией $\gamma_y : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$, точка z лежит и на прямой $\ell = (xy)$. \square

**Рис. 11◊14.** Вписанный шестиугольник.**Рис. 11◊15.** Описанный шестиугольник.

СЛЕДСТВИЕ 11.1 (ТЕОРЕМА БРИАНШОНА)

6-угольник p_1, p_2, \dots, p_6 тогда и только тогда описан вокруг некоторой коники, когда его главные диагонали (p_1p_4) , (p_2p_5) , (p_3p_6) пересекаются в одной точке (см. рис. 11◊15).

Доказательство. Эта теорема проективно двойственна к теореме Паскаля. \square

11.3. Внутренняя геометрия гладкой коники. Гладкую конику над алгебраически замкнутым полем продуктивно воспринимать как конику Веронезе (10-3) из прим. 10.1 на стр. 172. Это наделяет плоскость \mathbb{P}_2 и конику рядом дополнительных структур, которые мы сейчас опишем.

Зафиксируем двумерное векторное пространство U и проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Она канонически отождествляется с двойственной прямой $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ при помощи линейного изоморфизма $\det : \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(U^*) = \mathbb{P}_1^\times$, который сопоставляет точке $a \in \mathbb{P}_1$ её аннулятор — одномерное подпространство в U^* , порождённое линейной формой $\det(a, x) = a_0x_1 - x_1a_0 \in \mathbb{P}_1^\times$. Это позволяет (при желании) свободно переходить с языка точек на язык форм и обратно.

Рассмотрим пространство S^2U^* квадратичных форм на U и пространство S^2U квадратичных форм на U^* . Если зафиксировать в U базис (e_0, e_1) , а в U^* — двойственный базис (x_0, x_1) , то пространство S^2U^* отождествляется с пространством однородных многочленов степени 2 от (x_0, x_1) , а пространство S^2U — с пространством однородных многочленов степени 2 от (e_0, e_1) . Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} каждый элемент $q \in S^2U^*$ является произведением двух линейных форм $q = \varphi\psi$, которые определяются по q однозначно с точностью до умножения на обратные друг другу константы — это линейные формы, обращающиеся в нуль в двух точках квадрики на \mathbb{P}_1 , задаваемой уравнением $q(x) = 0$. Поэтому точки проективной плоскости $\mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}_2(S^2U^*)$ можно воспринимать как неупорядоченные пары точек $\{\varphi, \psi\} \subset \mathbb{P}_1^\times$. Двойственным образом, каждая квадратичная форма $w : U^* \longrightarrow \mathbb{k}$ является произведением $w = ab$ двух векторов $a, b \in U$ (рассматриваемых как линейные формы на U^*), которые определяются по w однозначно с точностью до умножения на обратные друг другу константы, и точки проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U)$ суть неупорядоченные пары точек $\{a, b\} \subset \mathbb{P}_1$.

Плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U)$ и $\mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(S^2U^*)$ на самом деле двойственны друг другу. Свёртка между $q = \varphi\psi \in S^2U^*$ и $w = ab \in S^2U$ задаётся формулой

$$\langle q, w \rangle = \tilde{q}(a, b) = \frac{1}{2} (\varphi(a)\psi(b) + \varphi(b)\psi(a)) = \tilde{w}(\varphi, \psi) \quad (11-2)$$

(поскольку φ, ψ и a, b определяются по q и w однозначно с точностью до умножения на обратные друг другу константы, результат зависит только от q и w).

УПРАЖНЕНИЕ 11.8. Проверьте, что формула 11-2 действительно определяет для каждого ненулевого $ab \in S^2U$ ненулевой линейный функционал ab на S^2U^* , причём $\forall a, b, c \in U (a+b)c = ac+bc$ как линейные функционалы на S^2U^* . Покажите, что двойственным к стандартному базису $(x_0^2, 2x_0x_1, x_1^2)$ в S^2U^* является базис (e_0^2, e_0e_1, e_1^2) (обратите внимание, что $\langle x_0x_1, e_0e_1 \rangle = 1/2$).

Напомним, что на \mathbb{P}_2^\times есть коника Веронезе C_{ver}^\times — образ отображения Веронезе

$$\mathbb{P}_1^\times \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi^2} \mathbb{P}_2^\times,$$

состоящий из квадратичных форм $q = \varphi^2$, являющихся полными квадратами линейных. В базисе $(x_0^2, 2x_0x_1, x_1^2)$, где однородными координатами квадратичной формы $q(x) = \sum q_{ij}x_ix_j$ являются отношения $(q_{00} : q_{01} : q_{11})$ элементов её матрицы Грама

$$G_q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{01} & q_{11} \end{pmatrix},$$

коника C_{ver}^\times является множеством нулей квадратичной формы

$$D(q) = \det G_q = q_{00}q_{11} - q_{01}^2 \quad (11-3)$$

УПРАЖНЕНИЕ 11.9. Напишите матрицу Грама этой формы в стандартном базисе $(x_0^2, 2x_0x_1, x_1^2)$.

Предложение 11.1

Двойственная к C_{ver}^\times коника $C_{\text{ver}} \subset \mathbb{P}_2$ состоит из пар совпадающих точек $\{a, a\}$ на \mathbb{P}_1 . Полярное преобразование $\widehat{D}^{-1} : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2^\times$ относительно коники C_{ver} переводит $ab \in S^2U$ в квадратичную форму

$$\begin{aligned} q_{ab}(x) &= 2 \det(a, x) \cdot \det(b, x) = \\ &= 2 (a_1b_1 \cdot x_0^2 - (a_0b_1 + a_1b_0) \cdot x_0x_1 + a_0b_0 \cdot x_1^2) \in S^2U^*, \end{aligned} \quad (11-4)$$

которая задаёт на \mathbb{P}_2 прямую, соединяющую точки a^2 и b^2 на C_{ver} . При $b = a$ эта прямая касается C_{ver} в точке a^2 и состоит из всевозможных ac с произвольными $c \in \mathbb{P}_1$. Две пары точек $\{a, b\} \subset \mathbb{P}_1$ и $\{c, d\} \subset \mathbb{P}_1$ сопряжены как точки на \mathbb{P}_2 относительно коники¹ C_{ver} тогда и только тогда, когда они гармоничны² друг другу на \mathbb{P}_1 .

Доказательство. Обозначим поляризации стандартных базисных форм $x_0^2, 2x_0x_1, x_1^2$ пространства $S^2(U^*)$ через

$$\sigma_{00}(x, y) = x_0y_0, \quad \sigma_{01}(x, y) = x_0y_1 + x_1y_0, \quad \sigma_{11}(x, y) = x_1y_1 \quad (11-5)$$

¹т. е. ортогональны друг другу относительно поляризованного уравнения коники

²т. е. $[a, b, c, d] = -1$

Согласно упр. 11.8, значения этих форм на $(a, b) \in U \times U$ являются координатами вектора $ab \in S^2U$ в двойственном базисе (e_0^2, e_0e_1, e_1^2) пространства S^2U . Квадратичная форма (11-4) может быть переписана как

$$q_{ab}(x) = 2 (\sigma_{11}(a, b) x_0^2 - \sigma_{01}(a, b) x_0x_1 + \sigma_{00}(a, b) x_1^2) ,$$

а её поляризация — как

$$\tilde{q}_{a,b}(x, y) = 2 \sigma_{11}(a, b) \sigma_{00}(x, y) - \sigma_{01}(a, b) \sigma_{01}(x, y) + 2 \sigma_{00}(a, b) \sigma_{11}(x, y) . \quad (11-6)$$

Тем самым, $cd \in S^2U$ лежит на прямой $\text{Ann}(\tilde{q}_{ab})$ когда правая часть (11-6) зануляется. Это условие означает ортогональность векторов ab и cd относительно симметричной билинейной формы на S^2U , матрица Грама которой в базисе (e_0^2, e_0e_1, e_1^2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

и обратна к матрице Грама квадратичной формы (11-3), задающей конику Веронезе $C_{\text{ver}}^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$. Поэтому полярное преобразование относительно коники $C_{\text{ver}} \subset \mathbb{P}_2$, двойственной к конике Веронезе, переводит $ab \in S^2U$ в $q_{ab} \in S^2U^*$. Остальные утверждения следуют из того, что поляризация $\tilde{q}_{ab}(x, y)$ квадратичной формы $\det(a, x)\det(b, x)$ имеет вид

$$\tilde{q}_{ab}(x, y) = (\det(a, x)\det(b, y) + \det(a, y)\det(b, x))/2 . \quad (11-7)$$

Из $\tilde{q}_{ab}(a, a) = \tilde{q}_{ab}(b, b) = 0$ вытекает, что полярная к ab прямая $\text{Ann} q_{ab}$ проходит через a^2 и b^2 . Сама коника C_{ver} состоит из точек, лежащих на своих полярах, и условие $\tilde{q}_{ab}(a, b) = -\det^2(a, b)/2 = 0$ равносильно тому, что $a = b$. Касательная к C_{ver} в точке a^2 состоит из таких cd , что $\tilde{q}_{aa}(c, d) = \det(a, c)\det(a, d) = 0$. Наконец, условие $\tilde{q}_{ab}(c, d) = 0$ равносильно равенству $[a, b, c, d] = (\det(a, c)\det(b, d)) : (\det(a, d)\det(a, c)) = -1$. \square

Предложение 11.2

Всякий проективный автоморфизм $F : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$, переводящий конику Веронезе C_{ver} в себя, имеет вид $ab \mapsto \varphi(a)\varphi(b)$, где $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ — гомография, однозначно определяющаяся по F .

Доказательство. Проективный изоморфизм F однозначно задаётся своим действием на какие-нибудь четыре различных точки $P_i = p_i^2$, $i = 1, 2, 3, 4$, на кривой Веронезе C_{ver} . Будем называть *двойным отношением* таких точек двойное отношение их проекций на какую-нибудь прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$ из какой-нибудь пятой точки $P \in C_{\text{ver}}$, отличной от всех четырёх.

УПРАЖНЕНИЕ 11.10. Убедитесь, что это двойное отношение не зависит ни от выбора ℓ , ни от выбора P .

С другой стороны, двойное отношение точек $P_i = p_i^2$ на C_{ver} равно двойному отношению точек p_i на \mathbb{P}_1 , поскольку композиция отображения $\mathbb{P}_1 \longrightarrow C_{\text{ver}}$, переводящего $p \in \mathbb{P}_1$ в p^2 , и проекции коники C_{ver} из любой её точки на любую прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$ биективна и задаётся рациональной формулой, а значит, является гомографией из \mathbb{P}_1 в ℓ .

УПРАЖНЕНИЕ 11.11. Убедитесь прямым вычислением, что проекция коники $a_0a_2 - a_1^2 = 0$ из точки $(1 : 1 : 1)$ на прямую $a_1 = 0$, переводит точку $(\alpha_0^2 : \alpha_0\alpha_1 : \alpha_1^2)$ в точку $(\alpha_0 : 0 : \alpha_1)$.

В силу линейности оператора F , двойное отношение проекций точек P_i на прямую ℓ из точки P равно двойному отношению проекций точек $F(P_i)$ на прямую $F(\ell)$ из точки $F(P)$. Поэтому по упр. 11.10

$$[P_1, P_2, P_3, P_4] = [F(P_1), F(P_2), F(P_3), F(P_4)].$$

Полагая $F(P_i) = \{q_i, q_i\}$, получаем

$$\begin{aligned} [p_1, p_2, p_3, p_4] &= [P_1, P_2, P_3, P_4] = \\ &= [F(P_1), F(P_2), F(P_3), F(P_4)] = [q_1, q_2, q_3, q_4]. \end{aligned}$$

Следовательно, существует гомография $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$, такая что $\varphi(p_i) = q_i$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$, причём эта гомография единственна. Отображение $S^2\varphi : ab \mapsto \varphi(a)\varphi(b)$ является линейным проективным преобразованием плоскости¹ \mathbb{P}_2 , и т. к. $S^2\varphi = F$ на четырёх точках, эти операторы равны всюду. \square

УПРАЖНЕНИЕ 11.12. Явно выпишите матрицу $S^2\varphi$ в базисе (e_0^2, e_0e_1, e_1^2) , если задана матрица φ в базисе (e_0, e_1) .

11.3.1. Гомографии на конике. Плоскость, на которой задана гладкая коника C , над алгебраически замкнутым полем продуктивно отождествлять с плоскостью $\mathbb{P}(S^2U^*)$ неупорядоченных пар точек на прямой $\mathbb{P}(U)$, так что коника становится при этом множеством двойных точек $\{a, a\}$. Предыдущее (предл. 11.2) показывает, что это отождествление единственно с точностью до проективного автоморфизма плоскости, переводящего конику в себя, и всякий такой автоморфизм индуцируется дробно линейным преобразованием координат на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$.

В частности, на любой конике C , как и на прямой, имеются внутренние однородные координаты, единственные с точностью до проективного преобразования. Их можно задать либо отождествив C с множеством двойных точек $\{a, a\}$ на \mathbb{P}_1 и объявив однородными координатами точки $\{a, a\} \in C$ однородные координаты точки a на \mathbb{P}_1 , либо спроектировав конику на любую прямую

¹двойственное преобразование $S^2\varphi^* : S^2U^* \longrightarrow S^2U^*$ переводит квадратичную форму $q(x)$ в форму $q(\varphi^{-1}(x))$, получающуюся из q линейной заменой координат, осуществляемой обратным оператором φ^{-1}

из любой лежащей на этой конике точки и объявив однородными координатами точки на конике однородные координаты её проекции на прямую. Эквивалентность всех этих определений (с точностью до линейного преобразования координат) уже использовалась нами в доказательстве предложения (предл. 11.2).

Будем называть отображение $\varphi : C \longrightarrow C$ гладкой коники в себя *гомографией*, если оно осуществляет дробно линейное преобразование внутренних однородных координат на конике. По лемме (предл. 11.2) любая гомография $\varphi : C \longrightarrow C$ однозначно поднимается до проективного автоморфизма всей плоскости, переводящего конику в себя и индуцирующего на ней гомографию φ . С другой стороны, по лемме (лем. 11.1), любое биективное всюду, за исключением, может быть, конечного множества точек, отображение $\varphi : C \longrightarrow C$, которое во внутренних однородных координатах на конике задается рациональной формулой вида

$$\varphi(\alpha_0 : \alpha_1) = (f(\alpha_0/\alpha_1) : g(\alpha_0/\alpha_1)), \quad \text{где } f, g \in \mathbb{k}[t],$$

является гомографией. Наконец, для любых двух упорядоченных троек различных точек коники существует единственная гомография, переводящее первую тройку точек во вторую с сохранением порядка.

ПРИМЕР 11.3 (инволюции)

Неттождественная гомография, обратная самой себе, называется *инволюцией*. Пусть инволюция $\sigma : C \longrightarrow C$ меняет местами две разных пары точек: $z' \leftrightarrow w'$ и $z'' \leftrightarrow w''$. Прямые $(z'w')$ и $(z''w'')$ пересекаются в какой-то точке

$$s = (z'w') \cap (z''w'') \notin C$$

(см. рис. 11◊16). Тогда действие σ на C высекается пучком прямых с центром в точке s : точки $z, w \in C$ переводятся друг в друга инволюцией σ тогда и только тогда, когда прямая (z, w) проходит через точку s .

В самом деле, это правило задаёт на C инволюцию, действие которой совпадает с действием σ на четырёх точках z', z'', w', w'' . В частности мы видим, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} каждая инволюция имеет ровно две различных неподвижных точки¹ — точки касания с C двух

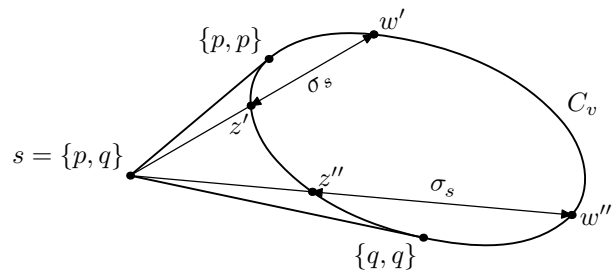


Рис. 11◊16. Инволюция на конике.

¹поучительно сравнить это геометрическое рассуждение с алгебраическим: инволюция $\sigma : \mathbb{P}(U) \longrightarrow \mathbb{P}(U)$ индуцируется линейным автоморфизмом $F : U \longrightarrow U$, и условие $\sigma^2 = \text{Id}$ означает, что $F^2 = \lambda E$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \mathbb{k}$; таким образом, оператор F аннулируется многочленом $t^2 - \lambda = (t - \sqrt{\lambda})(t + \sqrt{\lambda})$ без кратных корней, и значит, диагонализуем; поскольку $\varphi \neq \text{Id}$, оператор F не скалярен, и значит, имеет ровно два собственных вектора с противоположными собственными значениями $\pm\sqrt{\lambda}$.

касательных, опущенных на C из s ,
и две инволюции совпадают тогда и
только тогда, когда у них одни и те
же неподвижные точки¹.

УПРАЖНЕНИЕ 11.13. Покажите, что для любых двух различных инволюций $\sigma_1, \sigma_2 : C_{\text{ver}} \longrightarrow C_{\text{ver}}$ существует ровно одна точка $z \in C_{\text{ver}}$ такая, что $\sigma_1(z) = \sigma_2(z)$.

Мы будем обозначать инволюцию с неподвижными точками $p, q \in \mathbb{P}_1$ через $\sigma_{p,q}$. Если отождествить C с коникой Веронезе C_{ver} , то по лемме (предл. 11.1) инволюция $\sigma_{p,q}$ будет высекаться на C_{ver} пучком прямых с центром в точке $\{p, q\}$, и равенство $\sigma_{p,q}(a) = b$ будет равносильно гармоничности

$$[a, b, p, q] = -1.$$

УПРАЖНЕНИЕ 11.14. Напишите явную формулу, выражающую координаты точек p и q через координаты точек z', z'', w', w'' таких что $\sigma_{pq}(z') = (w')$ и $\sigma_{pq}(z'') = (w'')$.

ПРИМЕР 11.4 (ПЕРЕКРЁСТНАЯ ОСЬ)

Точно так же, как и в (п° 11.1.2), гомография $\varphi : C_{\text{ver}} \longrightarrow C_{\text{ver}}$, переводящая три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in C_{\text{ver}}$ в точки $a_2, b_2, c_2 \in C_{\text{ver}}$ является композицией проекции $\gamma_{b_2} : C_{\text{ver}} \longrightarrow \ell$ и проекции $\gamma_{b_1} : \ell \longrightarrow C_{\text{ver}}$, где прямая ℓ соединяет точки пересечения двух пар перекрёстных прямых $(a_1, b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1, b_2) \cap (b_1, c_2)$ (см. рис. 11◊17). В частности, неподвижные точки φ — это точки пересечения $\ell \cap C_{\text{ver}}$, откуда вытекает, что прямая ℓ не зависит от выбора точек $a_1, b_1, c_1 \in C_{\text{ver}}$ и что φ имеет либо две неподвижные точки, либо одну (в этом случае ℓ касается C_{ver} в этой точке).

Таким образом, ℓ представляет собой ГМТ пересечения всех перекрёстных прямых $(z, \varphi(w)) \cap (w, \varphi(z))$ с произвольными различными $z, w \in C_{\text{ver}}$. Отметим, что даёт новое доказательство теоремы Паскаля (теор. 11.1): три точки пересечений пар противоположных сторон вписанного в C_{ver} шестиугольника $a_1c_2b_1a_2c_1b_2$, будучи точками пересечений перекрёстных прямых гомографии, переводящей a_1, b_1, c_1 в a_2, b_2, c_2 , лежат на её перекрёстной оси ℓ .

¹дайте алгебраическое доказательство этому факту

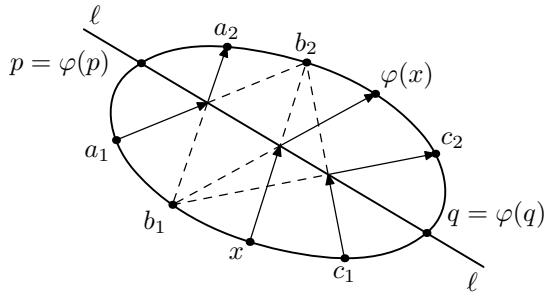


Рис. 11◊17. Перекрёстная ось.

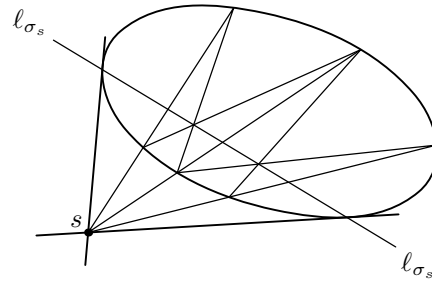


Рис. 11◊18. Построение касательных.

Отметим, что перекрёстная ось гомографии $\varphi : C \longrightarrow C$, заданной своим действием на какие-нибудь три точки, легко строится одной линейкой. Это позволяет одной линейкой построить образ $\varphi(z)$ любой точки $z \in C$ относительно такой гомографии, а также найти её неподвижные точки.

Например, можно одной линейкой начертить две касательных к данной гладкой конике C из данной точки $s \in \mathbb{P}_2$ — это будут две прямые, соединяющие s с неподвижными точками инволюции $\sigma_s : C \longrightarrow C$, высекаемой пучком прямых с центром в s . Чтобы найти эти неподвижные точки (см. рис. 11◊18), проведём через s любые три секущих и начертим перекрёстную ось ℓ_{σ_s} инволюции σ_s . Точки пересечения $\ell_{\sigma_s} \cap C$ будут искомыми точками касания.

УПРАЖНЕНИЕ 11.15. Одной линейкой постройте касательную к данной конике C в данной точке $p \in C$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.16. На \mathbb{P}_2 заданы невырожденная коника Q и три точки A, B, C вне неё. При помощи одной линейки нарисуйте треугольник, который вписан в Q , а его стороны лежат на прямых, проходящих через A, B, C . Сколько решений имеет эта задача?

Начнём наивное построение из произвольной точки $p \in Q$ и обозначим через $\gamma(p) \in Q$ точку, куда мы вернёмся, пройдя через A, B, C . Получающееся таким образом отображение $\gamma : C \longrightarrow C$ является гомографией, и нас интересуют её неподвижные точки. Таковых имеется две, и их построение линейкой стандартно.

УПРАЖНЕНИЕ 11.17. Сформулируйте и решите задачу, двойственную к предыдущей.