

Увеличиваем размерность . . .

- Г2◊1.** Медианой набора точек $P_1, P_2, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$ называется отрезок, соединяющий одну из них с барицентром¹ остальных. Покажите, что все медианы пересекаются в одной точке и выясните, в каком отношении они делятся точкой пересечения.
- Г2◊2.** При каких c четырёхмерный куб $I^4 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid |x_i| < 1\}$ пересекается с гиперплоскостью $\sum x_i = c$? Нарисуйте все трёхмерные многогранники, которые высекаются из куба такими гиперплоскостями.
- Г2◊3.** Нарисуйте развёртку трёхмерной поверхности четырёхмерного куба из предыдущей задачи² и напишите инструкцию для склейки четырёхмерного куба из этой развёртки (т.е. укажите, какие пары двумерных граней надлежит склеить друг с другом).
- Г2◊4.** Нарисуйте какую-нибудь двумерную параллельную проекцию четырёхмерного куба, у которой все вершины различны.
- Г2◊5.** При каких c четырёхмерный симплекс $\Delta_4 = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid \sum x_i = 1, x_i \geq 0\}$ пересекается с гиперплоскостью **а)** $x_1 = \text{const}$ **б)** $x_1 + x_2 = \text{const}$? Нарисуйте все трёхмерные многогранники, которые высекаются из четырёхмерного симплекса такими гиперплоскостями.
- Г2◊6.** Для всех $0 \leq m \leq (n-1)$ подсчитайте число m -мерных граней у n -мерного
а) куба $I^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < 1\}$
б) симплекса $\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1, x_i \geq 0\}$.
- Г2◊7.** В каком отношении делит внутреннюю³ диагональ n -мерного куба центр масс набора точек, состоящего из конца этой диагонали и всех вершин, соединённых с ней ребром?
- Г2◊8.** Пусть $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ не лежат в одной $(k-1)$ -мерной плоскости. Найдите ГМТ равноудалённых от всех p_i и докажите, что через любые $(n+1)$ не лежащих в одной $(n-1)$ -мерной гиперплоскости точек в \mathbb{R}^n проходит единственная сфера.
- Г2◊9.** В стандартном n -мерном кубе I^n найдите: **а)** количество внутренних диагоналей
б) длину диагонали и её предел при $n \rightarrow \infty$ **в)** радиус описанного шара
г) количество внутренних диагоналей, ортогональных заданной диагонали
д) количество осей⁴ и $(n-1)$ -мерных плоскостей симметрии
е) угол между внутренней диагональю и ребром, а также его предел при $n \rightarrow \infty$
ж) в каком отношении делят диагональ ортогональные проекции всех вершин
- Г2◊10.** В стандартном n -мерном симплексе $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1, x_i \geq 0\}$ найдите
а) радиус вписанного шара **б)** радиус описанного шара
в) угол между стороной и противолежащей гранью
г) кратчайшее расстояние между противоположными m - и $(n-m-1)$ -мерными гранями.
- Г2◊11.** Обозначим через $\Pi_k^n = \Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1} + \dots + \Pi_k^{n-1}$ количество кубиков в n -мерной ступенчатой пирамиде высоты k , образованной k ступенчатыми $(n-1)$ -мерными пирамидами убывающей высоты, поставленными в стопку вдоль n -той координатной оси⁵. Выразите Π_k^n через n, k и найдите отношение объёма параллелепипеда к объёму натянутого на его вершину и все соседние с ней вершины симплекса.

¹ барицентром набора точек называется центр тяжести этих точек, взятых с весом 1 каждая

² должен получиться трёхмерный многогранник, собранный из обычных трёхмерных кубиков

³ т.е. не лежащую в грани

⁴ под осью симметрии здесь понимается ось поворота на 180° , переводящего куб в себя

⁵ так, 2-мерная пирамида высоты k — это $\Pi_k^2 = \Pi_1^1 + \Pi_2^1 + \dots + \Pi_k^1 : k$

