

Примеры векторных пространств и базисов

- ГЗ◊1.** Сколько всего в n -мерном векторном пространстве над конечным полем из q элементов:
- а) векторов
 - б) упорядоченных наборов из k линейно независимых векторов
 - в) k -мерных подпространств?
- ГЗ◊2.** Чему равен предел последнего количества при фиксированных n и k и $q \rightarrow 1$?
- ГЗ◊3.** Всегда ли число элементов конечного поля является степенью его характеристики¹?
- ГЗ◊4 (пространства многочленов).** Укажите базис и найдите размерность пространства
- а) многочленов степени $\leq n$ от m переменных;
 - б) однородных многочленов степени d от m переменных;
 - в) однородных симметрических многочленов степени 10 от 4 переменных;
 - г) симметрических многочленов степени ≤ 3 от 4 переменных.
- ГЗ◊5.** Пусть векторное подпространство $V \subset \mathbb{k}[x]$ содержит по многочлену каждой из степеней $d = 0, 1, \dots, m$. Верно ли, что оно содержит все многочлены степени $\leq m$?
- ГЗ◊6.** Пусть $\mathbb{k} \subset \mathbb{F}$ — два поля, и \mathbb{F} — конечномерно как векторное пространство над \mathbb{k} . Любой ли элемент поля \mathbb{F} является корнем некоторого многочлена из $\mathbb{k}[x]$?
- ГЗ◊7.** Дано $m + 1$ попарно разных чисел $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{k}$. Постройте в пространстве многочленов $\mathbb{k}[x]_{\leq m}$ степени $\leq m$ такой базис, в котором координатами многочлена f являются
- а) значения f в точках a_i
 - б) значения f и его первых m производных в точке a_0
- Много ли существует таких базисов?
- ГЗ◊8.** Дано несколько разных точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ и для каждой точки a_i задано m_i чисел $b_i^{(0)}, b_i^{(1)}, \dots, b_i^{(m_i-1)}$, так что всего таких чисел $b_i^{(j)}$ задано $m + 1 = \sum m_i$. Сколько существует многочленов f степени $\leq m$, таких что f и его первые $m_i - 1$ производных $f^{(j)}$ принимают предписанные значения $b_i^{(j)}$ в каждой точке a_i ?
- ГЗ◊9.** Убедитесь, что множество V^M всех функций на данном множестве M со значениями в произвольном векторном пространстве V является векторным пространством (сложение функций и умножение их на константы определяется поточечно). Пусть M — конечное множество из n элементов и $V = \mathbb{k}$ — основное поле; укажите в V^M базис и найдите $\dim V^M$.
- ГЗ◊10.** Составляет ли множество всех подмножеств данного множества M векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2)$ относительно операций $X + Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, $1 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} X$, и $0 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$? Если да, то построьте в нём какой-нибудь базис и найдите его размерность (для конечного M). Обязательно ли семейство подмножеств $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ быть линейно независимым, если
- а) $X_i \not\subset \bigcup_{\nu \neq i} X_\nu$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$
 - б) $X_1 \not\subset X_2 \not\subset \dots \not\subset X_n$.
- ГЗ◊11.** На n -мерном пространстве V задана ненулевая линейная функция $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$. Покажите, что $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$ — векторное подпространство, и найдите $\dim \ker \varphi$.
- ГЗ◊12.** Тот же вопрос про сюръективную линейную функцию $\varphi : V \rightarrow W$, где W — произвольное m -мерное векторное пространство. Покажите, заодно, что $m \leq n$.
- ГЗ◊13.** Покажите, что для любых пяти различных точек на координатной плоскости \mathbb{k}^2 существует кривая второй степени², проходящая через эти пять точек.
- ГЗ◊14.** Сколько точек координатного пространства \mathbb{k}^3 гарантированно лежат на поверхности второй степени?
- ГЗ◊15.** Любые ли три прямые координатного пространства \mathbb{k}^3 гарантированно лежат на поверхности второй степени?

¹напомним, что *характеристикой* поля называется число элементов в его простом подполе, буде оно конечно; *простое подполе*, в свою очередь, — это наименьшее подполе, содержащее 0 и 1; если простое подполе бесконечно, характеристику полагают равной нулю

²т. е. фигура, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, где $f \in \mathbb{k}[x, y]$ — многочлен степени 2