

Евклидова геометрия

- Г4◊1.** Две гиперплоскости в \mathbb{R}^n заданы уравнениями: $\sum a_i x_i = c$ и $\sum b_i x_i = d$. Найдите угол между ними, а если он нулевой — расстояние.
- Г4◊2.** Найдите **а)** объём **б)** площадь поверхности сечения 4-мерного куба $0 \leq x_i \leq 1$ гиперплоскостью $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1$.
- Г4◊3 (кокуб).** Выпуклая оболочка¹ центров граней стандартного куба I^n называется стандартным *кокубом* C^n . **а)** Задайте C^n системой линейных неравенств. Нарисуйте **б)** 2-мерную параллельную проекцию 4-мерного кокуба **в)** развертку его 3-мерной поверхности с указаниями по склейке. Найдите **г)** количество граней каждой размерности **д)** радиусы вписанного и описанного шаров и их пределы при $n \rightarrow \infty$.
- Г4◊4* (октаплекс).** Нарисуем в \mathbb{R}^4 стандартный куб I^4 и гомотетичный стандартному кокуб \tilde{C}^4 , все вершины которого лежат на описанной вокруг I^4 сфере. Выпуклая оболочка объединения вершин куба I^4 и кокуба \tilde{C}^4 называется *октаплексом* O^4 . Подсчитайте у него **а)** количество граней каждой размерности **б)** длины рёбер и радиус вписанного шара. Выясните, как выглядят **в)** 3-мерные гиперграни и каковы их объёмы **г)** 2-мерные грани и каковы их площади. **д)** Найдите 4-мерный объём октаплекса.
- Г4◊5.** Сумма $\sum a_{ii}$ всех элементов на главной диагонали квадратной матрицы $A = (a_{ij})$, называется *следом* этой матрицы и обозначается $\text{tr}(A)$. Докажите, что $(A, B) = \text{tr}(AB^t)$ является евклидовой структурой на пространстве вещественных квадратных матриц и пишите ортогональные дополнение к подпространствам **а)** бесследных² **б)** симметричных³ **в)** верхнетреугольных⁴ **г)** кососимметричных матриц.
- Г4◊6.** Выразите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, \dots, v_n через их *определитель Грама* $\Gamma(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det((v_i, v_j))$
- Г4◊7.** Покажите, что расстояние от конца вектора v до подпространства, порождённого линейно независимыми векторами w_1, w_2, \dots, w_k , равно $\Gamma(v, w_1, w_2, \dots, w_k) / \Gamma(w_1, w_2, \dots, w_k)$.
- Г4◊8.** Найдите минимум $\int_{-1}^1 P^2(x) dx$ по всем многочленам P степени k со старшим коэффициентом 1 для **а)** $k = 2$ **б)** $k = 3$ **в*)** любого k .
- Г4◊9.** Пусть векторы $u_1, u_2, \dots, u_n, w_1, w_2, \dots, w_m$ линейно независимы. Верно ли, что формула $\sin \varphi = \Gamma(u_1, u_2, \dots, u_n, w_1, w_2, \dots, w_m) / (\Gamma(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \Gamma(w_1, w_2, \dots, w_m))$ задаёт (1) наименьший (2) наибольший угол $\varphi = \widehat{uw}$ с u и w из линейных оболочек векторов $\{u_i\}$ и $\{w_j\}$ соответственно **а)** для $n = 1$ (m любое) **б)** для $n = m = 2$ **в)** для любых n и m ?
- Г4◊10*.** Для k точек p_1, p_2, \dots, p_k образуем симметричную $k \times k$ матрицу $D_{p_1, p_2, \dots, p_k} = (|p_i p_j|^2)$ и обозначим через C_{p_1, p_2, \dots, p_k} матрицу размера $(k+1) \times (k+1)$, получающуюся приписыванием к D единичной строки сверху, единичного столбца слева и нуля в левом верхнем углу. Покажите, что **а)** $\Gamma(\overrightarrow{p_0 p_1}, \overrightarrow{p_0 p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \det C_{p_0, p_1, \dots, p_n}$ (внимание: размер у матриц разный!) **б)** $(n+1)$ точек p_0, p_1, \dots, p_n лежат в гиперплоскости $\iff \det C_{p_0, p_1, \dots, p_n} = 0$ **в)** $(n+2)$ точек p_0, p_1, \dots, p_{n+1} лежат на сфере или в гиперплоскости $\iff \det D_{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}} = 0$ **г)** квадрат радиуса описанного шара симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ равен $-\frac{1}{2} \frac{\det D_{p_0, p_1, \dots, p_n}}{\det C_{p_0, p_1, \dots, p_n}}$. **д)** симплекс $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ с предписанными длинами сторон $d_{ij} = |p_i p_j|$ существует тогда и только тогда, когда все главные миноры⁵ всех порядков $2 \leq r \leq (n+1)$ в матрице $D = (d_{ij}^2)$ отличны от нуля и имеют знаки $(-1)^{r-1}$

¹т. е. множество всех барицентрических комбинаций с неотрицательными весами

²т. е. с нулевым следом

³матрица (c_{ij}) называется симметричной (соотв. кососимметричной), если $c_{ij} = c_{ji}$ (соотв. $c_{ij} = -c_{ji}$)

⁴таких (c_{ij}) , у которых $c_{ij} = 0$ при $i > j$

⁵т. е. определители всевозможных квадратных подматриц размера $r \times r$, главная диагональ которых содержится в главной диагонали исходной матрицы