Евклидова геометрия

Г4◇1. Две гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ заданы уравнениями: $\sum a_i x_i = c$ и $\sum b_i x_i = d$. Найдите угол между ними, а если он нулевой — расстояние.

Г4◇2. Найдите **а)** объём **б)** площадь поверхности сечения 4-мерного куба $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ гиперплоскостью $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1$.

Г4◇3 (кокуб). Выпуклая оболочка[1] центров граней стандартного куба I^n называется стандартным *кокубом* C^n. **а)** Задайте C^n системой линейных неравенств. Нарисуйте **б)** 2-мерную параллельную проекцию 4-мерного кокуба **в)** развертку его 3-мерной поверхности с указаниями по склейке. Найдите **г)** количество граней каждой размерности **д)** радиусы вписанного и описанного шаров и их пределы при $n \to \infty$.

Г4◇4* (октаплекс). Нарисуем в $\mathbb{R}^4$ стандартный куб I^4 и гомотетичный стандартному кокуб $\widetilde{C}^4$, все вершины которого лежат на описанной вокруг I^4 сфере. Выпуклая оболочка объединения вершин куба I^4 и кокуба $\widetilde{C}^4$ называется *октаплексом* O^4. Подсчитайте у него **а)** количество граней каждой размерности **б)** длины рёбер и радиус вписанного шара. Выясните, как выглядят **в)** 3-мерные гиперграни и каковы их объёмы **г)** 2-мерные грани и каковы их площади. **д)** Найдите 4-мерный объём октаплекса.

Г4◇5. Сумма $\sum a_{ii}$ всех элементов на главной диагонали квадратной матрицы $A = (a_{ij})$, называется *следом* этой матрицы и обозначается $\operatorname{tr}(A)$. Докажите, что $(A, B) = \operatorname{tr}(AB^t)$ является евклидовой структурой на пространстве вещественных квадратных матриц и пишите ортогональные дополнение к подпространствам **а)** бесследных[2] **б)** симметричных[3] **в)** верхнетреугольных[4] **г)** кососимметричных матриц.

Г4◇6. Выразите объем параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ через их *определитель Грама* $\Gamma(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det\big((v_i, v_j)\big)$

Г4◇7. Покажите, что расстояние от конца вектора v до подпространства, порождённого линейно независимыми векторами $w_1, w_2, \dots, w_k$, равно $\Gamma(v, w_1, w_2, \dots, w_k)/\Gamma(w_1, w_2, \dots, w_k)$.

Г4◇8. Найдите минимум $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(x)dx$ по всем многочленам P степени k со старшим коэффициентом 1 для **а)** $k = 2$ **б)** $k = 3$ **в*)** любого k.

Г4◇9. Пусть векторы $u_1, u_2, \dots, u_n$, $w_1, w_2, \dots, w_m$ линейно независимы. Верно ли, что формула $\sin\varphi = \Gamma(u_1, u_2, \dots, u_n,\ w_1, w_2, \dots, w_m)/\left(\Gamma(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \Gamma(w_1, w_2, \dots, w_m)\right)$ задаёт (1) наименьший (2) наибольший угол $\varphi = \widehat{uw}$ с u и w из линейных оболочек векторов $\{u_i\}$ и $\{w_j\}$ соответственно **а)** для $n = 1$ (m любое) **б)** для $n = m = 2$ **в)** для любых n и m?

Г4◇10*. Для k точек $p_1, p_2, \dots, p_k$ образуем симметричную $k \times k$ матрицу $D_{p_1,p_2,\dots,p_k} = (|p_i p_j|^2)$ и обозначим через $C_{p_1,p_2,\dots,p_k}$ матрицу размера $(k+1)\times(k+1)$, получающуюся приписыванием к D единичной строки сверху, единичного столбца слева и нуля в левом верхнем углу. Покажите, что **а)** $\Gamma\left(\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \cdots, \overrightarrow{p_0p_n}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \det C_{p_0,p_1,\dots,p_n}$ (внимание: размер у матриц разный!)

б) $(n+1)$ точек $p_0, p_1, \dots, p_n$ лежат в гиперплоскости $\iff \det C_{p_0,p_1,\dots,p_n} = 0$

в) $(n+2)$ точек $p_0, p_1, \dots, p_{n+1}$ лежат на сфере или в гиперплоскости $\iff \det D_{p_0,p_1,\dots,p_{n+1}} = 0$

г) квадрат радиуса описанного шара симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ равен $-\frac{1}{2}\,\frac{\det D_{p_0,p_1,\dots,p_n}}{\det C_{p_0,p_1,\dots,p_n}}$.

д) симплекс $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ с предписанными длинами сторон $d_{ij} = |p_i p_j|$ существует тогда и только тогда, когда все главные миноры[5] всех порядков $2 \leqslant r \leqslant (n+1)$ в матрице $D = \left(d_{ij}^2\right)$ отличны от нуля и имеют знаки $(-1)^{r-1}$

---

[1] т. е. множество всех барицентрических комбинаций с неотрицательными весами

[2] т. е. с нулевым следом

[3] матрица (c_{ij}) называется симметричной (соотв. кососимметричной), если $c_{ij} = c_{ji}$ (соотв. $c_{ij} = -c_{ji}$)

[4] таких (c_{ij}), у которых $c_{ij} = 0$ при $i > j$

[5] т. е. определители всевозможных квадратных подматриц размера $r \times r$, главная диагональ которых содержится в главной диагонали исходной матрицы