

## Правильные многогранники

**Терминология и обозначения.** Многогранником в  $\mathbb{R}^n$  называется выпуклая оболочка конечного набора точек или, что то же самое, компактное пересечение конечного числа (замкнутых) полупространств. Группой (соотв. собственной группой) многогранника называется группа всех теоретико-множественных отображений из многогранника в себя, индуцированных ортогональными (соотв. собственными ортогональными) преобразованиями  $\mathbb{R}^n$ . Флагом многогранника называется любая последовательность: вершина, примыкающее к ней ребро, примыкающая к нему двумерная грань,  $\dots$ , примыкающая к ней  $(n-1)$ -мерная грань (участвуют все промежуточные размерности). Многогранник называется *правильным*, если его группа транзитивно действует на множестве его флагов. Для правильного многогранника  $P \subset \mathbb{R}^n$  мы обозначаем через  $\ell(P)$  длину его ребра, через  $r(P)$  — радиус описанного шара, через  $\varrho(P) = \ell^2/4r^2$  — квадрат отношения длины ребра к диаметру описанного шара.

**Г5 $\frac{1}{2}$ ◇1.** Перечислите все движения в собственной и несобственной группах правильных  
 а) куба б) октаэдра в) тетраэдра г) додекаэдра д) икосаэдра в  $\mathbb{R}^3$ , а также в группе  
 е) правильного плоского  $n$  угольника в  $\mathbb{R}^3$ .

**Г5 $\frac{1}{2}$ ◇2 (двойственность).** Пусть многогранник  $P \in V = \mathbb{R}^n$  содержит начало координат в качестве внутренней точки. Покажите, что  $P^* = \{\xi \in V^* \mid \xi(v) \geq -1 \ \forall v \in P\}$  является содержащим начало координат многогранником в  $V^*$  и установите биекцию между  $k$ -мерными гранями  $P$  и  $(n-k-1)$ -мерными гранями  $P^*$ .

**Г5 $\frac{1}{2}$ ◇3 (звезда).** Покажите, что все вершины правильного многогранника  $P \subset \mathbb{R}^n$ , соединённые ребром с заданной вершиной  $p \in P$  лежат в одной  $(n-1)$ -мерной плоскости и образуют в ней правильный многогранник (он обозначается  $\text{st}(P)$  и называется *звездой*  $P$ ).

**Г5 $\frac{1}{2}$ ◇4 (символ Шлефли).** Символом правильного многогранника  $P \subset \mathbb{R}^n$  называется последовательность из  $(n-1)$  натуральных чисел  $(\nu_1(P), \nu_2(P), \dots, \nu_{n-1}(P))$ , в которой  $\nu_1(P)$  равно числу рёбер двумерной грани многогранника  $P$ , а подпоследовательность

$$(\nu_2(P), \dots, \nu_{n-1}(P)) = (\nu_1(\text{st}(P)), \dots, \nu_{n-2}(\text{st}(P)))$$

является символом звезды  $\text{st}(P)$ . Найдите символы: а) 3-мерных додекаэдра и икосаэдра  
 б) 4-мерного октаплекса в)  $n$ -мерного симплекса г)  $n$ -мерного куба д)  $n$ -мерного кокуба.  
 е) Как связаны символы  $\text{st}(P)$  и  $\text{st}(P^*)$ ? ж) Выразите  $\ell(\text{st}(P))$  через  $\ell(P)$  и  $\nu_1(P)$ .  
 з) Покажите, что  $\varrho(P) = 1 - \varrho^{-1}(\text{st}(P)) \cdot \cos^2(\pi/\nu_1(P))$  зависит только от  $\text{st}(P)$ .

**Г5 $\frac{1}{2}$ ◇5.** Покажите, что символы всех возможных правильных многогранников  $P \subset \mathbb{R}^n$  содержится в следующем списке: а)  $(\nu)$ , где  $\nu \geq 3$  — любое натуральное, когда  $n = 2$   
 б)  $(3, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(5, 3)$ , когда  $n = 3$   
 в)  $(3, 3, 3)$ ,  $(3, 3, 4)$ ,  $(4, 3, 3)$ ,  $(3, 4, 3)$ ,  $(3, 3, 5)$ ,  $(5, 3, 3)$ , когда  $n = 4$   
 г)  $(3, \dots, 3)$ ,  $(3, \dots, 3, 4)$ ,  $(4, 3, \dots, 3)$  для  $n \geq 5$ .

**Г5 $\frac{1}{2}$ ◇6.** Покажите, что выпуклая оболочка вершин стандартного 4-мерного куба, вершин 4-мерного кокуба, гомотетичного стандартному с коэффициентом 2, и всех точек, которые можно получить всевозможными чётными перестановками координат из точек  $(\pm\tau, \pm 1, \pm\tau^{-1}, 0)$ , где  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$  — золотое сечение, представляет собою правильный 4-мерный многогранник с символом  $(3, 3, 5)$ .

**Г5 $\frac{1}{2}$ ◇7 (теорема Шлефли).** Покажите, что для каждого из перечисленных в зад. Г5 $\frac{1}{2}$ ◇5 символов Шлефли имеется единственный с точностью до подобия правильный многогранник с таким символом, что даёт полный список всех существующих правильных многогранников.

**Г5 $\frac{1}{2}$ ◇8.** Сколько элементов в собственных группах 4-мерных правильных многогранников с символами а)  $(3, 4, 3)$  б)  $(3, 3, 5)$  в)  $(5, 3, 3)$ ?

**Г5 $\frac{1}{2}$ ◇9.** Попытайтесь явно перечислить все движения из предыдущей задачи.