

Аффинные и ортогональные преобразования

Г5◊1. Верно ли, что если некоторая группа \mathfrak{G} аффинных преобразований пространства \mathbb{A}^n имеет конечную орбиту¹, то \mathfrak{G} имеет и неподвижную точку?

Г5◊2 (аффинные преобразования плоскости). Назовём две фигуры *аффинно конгруэнтными*, если они переводятся друг в друга аффинным преобразованием. Верно ли, что:

- а) две трапеции аффинно конгруэнтны \iff отношения их оснований равны?
- б) два четырёхугольника аффинно конгруэнтны \iff отношения, в которых их соответственные диагонали делятся точкой своего пересечения, равны?
- в) пятиугольник аффинно конгруэнтен правильному \iff 4 из его диагоналей параллельны противоположащим им сторонам?

Г5◊3 (движения плоскости). Пусть τ_v , σ_ℓ и $\varrho_{p,\varphi}$ обозначают, соответственно, сдвиг на вектор v , отражение относительно прямой ℓ и поворот вокруг точки p на угол φ против ЧС. Выясните, когда имеют место написанные ниже равенства, и во всех случаях, когда они верны, выразите параметры движения в правой части, через параметры движений из левой части:

- а) $\sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2} = \varrho_{p,\varphi}$ б) $\sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2} = \tau_v$ в) $\tau_u \circ \tau_w = \tau_v$ г) $\varrho_{p,\varphi} \circ \varrho_{q,\psi} = \varrho_{r,\vartheta}$ д) $\sigma_\ell \circ \varrho_{p,\varphi} \circ \sigma_\ell = \varrho_{q,\psi}$
- е) $\varrho_{p,\varphi} \circ \sigma_{\ell_1} \circ \varrho_{p,-\varphi} = \sigma_{\ell_2}$ ж) $\varrho_{p,\varphi} \circ \sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell_2}$

Г5◊4. Опишите композицию четырёх отражений плоскости относительно последовательных (против ЧС) сторон квадрата.

Г5◊5. Найдите ГМТ x с минимальным расстоянием $|x, f(x)|$, где f — композиция трёх отражений плоскости относительно последовательных (против ЧС) сторон данного треугольника.

Г5◊6 (собственные подобия плоскости). Композиции сдвигов, поворотов и гомотетий аффинной евклидовой плоскости называются её *собственными подобиями*. Покажите, что:

- а) группа собственных подобий изоморфна группе всех аффинных преобразований комплексной прямой $\mathbb{A}_1(\mathbb{C})$ б) для любых двух пар точек $a \neq b$ и $a' \neq b'$ существует единственное собственное подобие ψ : $\psi(a) = a'$ и $\psi(b) = b'$ в) всякое собственное подобие является либо сдвигом либо поворотной гомотетией. г) По данным $a \neq b$ и $a' \neq b'$ циркулем и линейкой постройте центр поворотной гомотетии или вектор сдвига из зад. Г5◊6б)

Г5◊7 (движения пространства). Пусть τ_v , σ_π и $\varrho_{v,\varphi}$ обозначают, соответственно, сдвиг на вектор v , отражение в плоскости π и поворот вокруг прямой с направляющим вектором v на угол φ против ЧС, если глядеть вдоль v . Выясните, когда имеют место написанные ниже равенства, и во всех случаях, когда они верны, выразите параметры движения в правой части через параметры движений из левой

- а) $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \varrho_{v,\varphi}$; б) $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \tau_v$;
- в) $\sigma_\pi \circ \varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_\pi = \varrho_{v,\psi}$ г) $\varrho_{u,\varphi} \circ \varrho_{w,\psi} = \tau_v \circ \varrho_{v,\vartheta}$ д) $\varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_\pi \circ \varrho_{u,-\varphi} = \sigma_{\pi_2}$ е) $\varrho_{u,\varphi} \circ \sigma_{\pi_1} = \sigma_{\pi_2}$
- ж) $\tau_{u_2} \circ \sigma_{\pi_2} \circ \tau_{u_1} \circ \sigma_{\pi_1} = \tau_v \circ \varrho_{v,\varphi}$, где каждый из сдвигов u_i параллелен соответствующей плоскости отражения π_i , $i = 1, 2$.

Г5◊8. Верно ли, что композиция любого поворота с любым переносом является винтовым движением² с тем же углом закрутки, что и исходный поворот?

Г5◊9. Пусть $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — некоторое движение. В обозначениях зад. Г5◊7 опишите движение: а) $F \circ \tau_v \circ F^{-1}$ б) $F \circ \sigma_\pi \circ F^{-1}$ в) $F \circ \varrho_{v,\varphi} \circ F^{-1}$

Г5◊10*. Покажите, что группа $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ проста³.

Г5◊11*. Докажите, что группа $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ компактна⁴ и линейно связна⁵. Проста ли она?

Г5◊12. Опишите все конечные подгруппы в: а) $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ б) $\text{O}_2(\mathbb{R})$ в*) $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ г*) $\text{O}_3(\mathbb{R})$

¹орбитой точки $x \in X$ относительно группы \mathfrak{G} преобразований множества X называется множество всех точек, которые можно получить из x всевозможными преобразованиями из \mathfrak{G}

²т. е. композицией поворота с переносом на вектор, параллельный оси поворота

³группа \mathfrak{G} называется *простой*, если у неё нет отличных от единицы и всей группы подгрупп $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, таких что $ghg^{-1} \in \mathfrak{H}$ для всех $h \in \mathfrak{H}$ и $g \in \mathfrak{G}$

⁴т. е. ограничена и замкнута в евклидовом пространстве квадратных матриц \mathbb{R}^{n^2}

⁵т. е. любые две точки соединяются непрерывной кривой