

### Топологии, расстояния и выпуклость

**Топологическая зоология точек.** Фигура  $B_\varepsilon(p) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : |x_i - p_i| \leq \varepsilon \forall i\}$  (где  $\varepsilon > 0$ ) называется (стандартным)  $\varepsilon$ -кубом с центром в  $p \in \mathbb{R}^n$ . Точка  $p$  фигуры  $\Phi \subset \mathbb{R}^n$  называется *внутренней*, если  $\Phi$  содержит некоторый  $\varepsilon$ -куб  $B_\varepsilon(p)$ . Внутренние точки дополнения  $\mathbb{R}^n \setminus \Phi$  называются *внешними* точками  $\Phi$ . Точки  $p$ , не являющиеся ни внешними, ни внутренними точками  $\Phi$ , называются *границными* или *собственными граничными*, смотря по тому, принадлежат ли они  $\Phi$ . Внутренность, внешность и граница фигуры  $\Phi$  обозначаются через  $\overset{\circ}{\Phi}$ ,  $\overset{\circ}{\Phi}^c$  и  $\partial\Phi$  соответственно. Фигура  $\bar{\Phi} = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{\Phi}^c$  называется *замыканием*  $\Phi$ . Точка  $p$  называется *предельной точкой* фигуры  $\Phi$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \Phi \cap (B_\varepsilon(p) \setminus p) \neq \emptyset$ . Фигура  $\Phi$  называется *открытой* если все её точки внутренние, и *замкнутой*, если она содержит все свои предельные точки.

Г6◇1°. Покажите, что дополнение к открытой фигуре замкнуто, а к замкнутой — открыто, и что открытые фигуры образуют топологию с базой из открытых  $\varepsilon$ -кубов  $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(p)$ .

Г6◇2°. Покажите, что замыкание  $\bar{\Phi}$  фигуры  $\Phi$  представляет собою:

- а) дизъюнктное объединение  $\Phi$  и множества всех её несобственных граничных точек
- б) объединение  $\Phi$  и множества всех её предельных точек
- в) наименьшую по включению замкнутую фигуру, содержащую  $\Phi$

Г6◇3°. Покажите, что в  $\mathbb{R}^n$  любая бесконечная последовательность вложенных  $\varepsilon$ -кубов

$$B_{\varepsilon_1}(p_1) \supset B_{\varepsilon_2}(p_2) \supset B_{\varepsilon_3}(p_3) \supset \dots$$

с  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$  имеет единственную общую точку.

Г6◇4° (компактность 1). Докажите эквивалентность следующих свойств фигуры  $\Phi \subset \mathbb{R}^n$  (если они выполняются, фигура называется *компактом*):

- а)  $\Phi$  замкнута и содержится в некотором кубе
- б) из любого покрытия  $\Phi$  открытыми фигурами можно выбрать конечное подпокрытие
- в) любая последовательность  $x : \mathbb{N} \rightarrow \Phi$  имеет в  $\Phi$  предельную точку<sup>1</sup>

Г6◇5. Покажите, что в любом метрическом пространстве открытые шары

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(p) = \{x \mid \rho(x, p) < \varepsilon\}$$

составляют базу топологии, в которой замкнутые шары  $B_\varepsilon(p) = \{x \mid \rho(x, p) \leq \varepsilon\}$  замкнуты.

Г6◇6. Приведите пример нормы на  $\mathbb{R}^n$ , не происходящей ни из какого евклидова скалярного произведения.

Г6◇7\*. Дайте определение предела последовательности точек произвольного топологического пространства. Покажите, что полагая замкнутыми множествами  $\mathbb{R}, \emptyset$ , а также все

- а) конечные      б) не более чем счётные
- подмножества в  $\mathbb{R}$ , мы (в каждом из двух случаев) задаём на  $\mathbb{R}$  топологию. В топологии из п. а) опишите    в) замыкание множества  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$     г) все сходящиеся последовательности.
- д) Как устроены последовательности, для которых *каждая* точка  $p \in \mathbb{R}$  является пределом?

Г6◇8° (компактность 2). Докажите эквивалентность следующих свойств топологического пространства  $X$  (если они выполняются, пространство называется *компактом*):

- а) из любого открытого покрытия  $X$  можно выбрать конечное подпокрытие
- б) любой набор замкнутых подмножеств в  $X$ , каждый конечный поднабор в котором имеет непустое пересечение, сам имеет непустое пересечение.

<sup>1</sup>напомним, что точка  $p$  называется предельной точкой *последовательности*  $x_n$ , если в  $x_n$  имеется подпоследовательность  $z_k = x_{n_k}$ , сходящаяся к точке  $p$ ; предельные точки *последовательности* не следует путать с предельными точками *множества значений* этой последовательности

Г6◇9°. Верно ли, что каждое бесконечное подмножество компакта имеет хотя бы одну предельную точку?

Г6◇10°. Верно ли, что каждое замкнутое подмножество компакта тоже компакт (в индуцированной топологии<sup>2</sup>)?

Г6◇11°. Верно ли, что компактное (в индуцированной топологии) подмножество хаусдорфова пространства всегда замкнуто?

Г6◇12. Докажите, что подмножество полного метрического пространства компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто, и для любого  $\varepsilon > 0$  оно покрывается конечным числом  $\varepsilon$ -шаров<sup>3</sup>.

**Выпуклая зоология точек.** Точка  $p = x_1q_1 + x_2q_2 + \dots + x_mq_m \in \mathbb{R}^n$  с  $x_i > 0$  и  $\sum x_i = 1$  называется *выпуклой комбинацией* точек  $q_1, q_2, \dots, q_m$ . Фигура  $\Phi$  называется *выпуклой*, если она содержит все выпуклые комбинации любых своих точек. Пересечение всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру  $\Phi$ , называется выпуклой оболочкой фигуры  $\Phi$  и обозначается  $\text{conv } \Phi$ . Непустое пересечение выпуклой фигуры  $\Phi$  с какой-нибудь аффинной гиперплоскостью  $\xi(x) = a$ , такой что вся фигура  $\Phi$  целиком содержится в полупространстве  $\xi(x) \geq a$ , называется *гранью*  $\Phi$ , а аффинный функционал  $\xi(x) - a$  и задаваемая им гиперплоскость называются в этом случае *опорными* для  $\Phi$ . Размерность грани — это размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Нульмерные грани фигуры  $\Phi$  называются её *вершинами*. Точка  $p \in \Phi$  называется *крайней*, если она не является внутренней точкой никакого содержащегося в  $\Phi$  отрезка.

Г6◇13°. Покажите, что выпуклая комбинация выпуклых комбинаций является выпуклой комбинацией исходных точек, и выведите отсюда, что для выпуклости фигуры необходимо и достаточно, чтобы она вместе с каждыми двумя точками содержала и соединяющий их отрезок.

Г6◇14° (симплекс). Проверьте, что выпуклая оболочка  $[p_0, p_1, \dots, p_n]$  любого набора не лежащих в одной гиперплоскости точек  $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$  имеет непустую внутренность, а его граница является объединением всевозможных симплексов вида  $[p_{\nu_1}, p_{\nu_2}, \dots, p_{\nu_m}]$  с  $m < n + 1$  и  $\nu_i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Г6◇15\* (лемма Каратеодори). Каждая точка из выпуклой оболочки произвольной фигуры  $\Phi \subset \mathbb{R}^n$  является выпуклой комбинацией не более  $(n + 1)$  точек фигуры  $\Phi$ .

Г6◇16°. Покажите, что а) замыкание б) внутренность выпуклой фигуры выпуклы.

Г6◇17°. Приведите пример замкнутой фигуры с непустой внутренностью, замыкание которой отлично от самой фигуры. Возможно ли такое, если фигура выпукла?

Г6◇18°. Покажите, что замкнутая выпуклая фигура является пересечением содержащих её полупространств.

Г6◇19. Верно ли, что у каждой замкнутой выпуклой фигуры

- а) грань грани является гранью самой фигуры
- б) крайняя точка грани является крайней точкой самой фигуры
- в) все вершины являются крайними точками
- г) все крайние точки являются вершинами.

Г6◇20. Покажите, что замкнутая ограниченная выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Г6◇21\* (лемма Радона). Любой конечное множество из  $\geq (n + 2)$  различных точек в  $\mathbb{R}^n$  всегда можно разбить в дизъюнктное объединение двух непустых подмножеств с пересекающимися выпуклыми оболочками.

Г6◇22\* (теорема Хелли). Если в наборе замкнутых выпуклых фигур в  $\mathbb{R}^n$  имеется хоть одна компактная и каждый поднабор из  $(n + 1)$  фигур имеет непустое пересечение, то и весь набор имеет непустое пересечение.

<sup>2</sup>замкнутыми в которой являются пересечения этого подмножества со всевозможными замкнутыми подмножествами объемлющего пространства

<sup>3</sup>про такие множества говорят, что они *вполне ограничены*, ибо это *более сильное* условие, чем ограниченность