Топологии, расстояния и выпуклость

Топологическая зоология точек. Фигура $B_\varepsilon(p) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \;:\; |x_i - p_i| \le \varepsilon \;\forall\, i\}$ (где $\varepsilon > 0$) называется (*стандартным*) *ε-кубом* с центром в $p \in \mathbb{R}^n$. Точка p фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ называется *внутренней*, если Φ содержит некоторый ε-куб $B_\varepsilon(p)$. Внутренние точки дополнения $\mathbb{R}^n \smallsetminus \Phi$ называются *внешними* точками Φ. Точки p, не являющиеся ни внешними, ни внутренними точками Φ, называются *граничными* или *собственными граничными*, смотря по тому, принадлежат ли они Φ. Внутренность, внешность и граница фигуры Φ обозначаются через $\mathring{\Phi}$, $\breve{\Phi}$ и $\partial\Phi$ соответственно. Фигура $\overline{\Phi} = \mathbb{R}^n \smallsetminus \breve{\Phi}$ называется *замыканием* Φ. Точка p называется называется *предельной точкой* фигуры Φ, если $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \Phi \cap (B_\varepsilon(p) \smallsetminus p) \neq \varnothing$. Фигура Φ называется *открытой* если все её точки внутренние, и *замкнутой*, если она содержит все свои предельные точки.

Г6◇1°. Покажите, что дополнение к открытой фигуре замкнуто, а к замкнутой — открыто, и что открытые фигуры образуют топологию с базой из открытых ε-кубов $\mathring{B}_\varepsilon(p)$.

Г6◇2°. Покажите, что замыкание $\overline{\Phi}$ фигуры Φ представляет собою:

а) дизъюнктное объединение Φ и множества всех её несобственных граничных точек

б) объединение Φ и множества всех её предельных точек

в) наименьшую по включению замкнутую фигуру, содержащую Φ

Г6◇3°. Покажите, что в $\mathbb{R}^n$ любая бесконечная последовательность вложенных ε-кубов

$$B_{\varepsilon_1}(p_1) \supset B_{\varepsilon_2}(p_2) \supset B_{\varepsilon_3}(p_3) \supset \;\cdots$$

с $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ имеет единственную общую точку.

Г6◇4° (компактность 1). Докажите эквивалентность следующих свойств фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ (если они выполняются, фигура называется *компактом*):

а) Φ замкнута и содержится в некотором кубе

б) из любого покрытия Φ открытыми фигурами можно выбрать конечное подпокрытие

в) любая последовательность $x : \mathbb{N} \longrightarrow \Phi$ имеет в Φ предельную точку[1]

Г6◇5. Покажите, что в любом метрическом пространстве открытые шары

$$\mathring{B}_\varepsilon(p) = \{x \mid \varrho(x,p) < \varepsilon\}$$

составляют базу топологии, в которой замкнутые шары $B_\varepsilon(p) = \{x \mid \varrho(x,p) \leqslant \varepsilon\}$ замкнуты.

Г6◇6. Приведите пример нормы на $\mathbb{R}^n$, не происходящей ни из какого евклидова скалярного произведения.

Г6◇7*. Дайте определение предела последовательности точек произвольного топологического пространства. Покажите, что полагая замкнутыми множествами $\mathbb{R}$, $\varnothing$, а также все

а) конечные **б)** не более чем счётные

подмножества в $\mathbb{R}$, мы (в каждом из двух случаев) задаём на $\mathbb{R}$ топологию. В топологии из п. а) опишите **в)** замыкание множества $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ **г)** все сходящиеся последовательности.

д) Как устроены последовательности, для которых *каждая* точка $p \in \mathbb{R}$ является пределом?

Г6◇8° (компактность 2). Докажите эквивалентность следующих свойств топологического пространства X (если они выполняются, пространство называется *компактом*):

а) из любого открытого покрытия X можно выбрать конечное подпокрытие

б) любой набор замкнутых подмножеств в X, каждый конечный поднабор в котором имеет непустое пересечение, сам имеет непустое пересечение.

---

[1] напомним, что точка p называется предельной точкой *последовательности* x_n, если в x_n имеется подпоследовательность $z_k = x_{n_k}$, сходящаяся к точке p; предельные точки *последовательности* не следует путать с предельными точками *множества значений* этой последовательности

Г6◇9°. Верно ли, что каждое бесконечное подмножество компакта имеет хотя бы одну предельную точку?

Г6◇10°. Верно ли, что каждое замкнутое подмножество компакта тоже компакт (в *индуцированной топологии*[2])?

Г6◇11°. Верно ли, что компактное (в индуцированной топологии) подмножество хаусдорфова пространства всегда замкнуто?

Г6◇12. Докажите, что подмножество полного метрического пространства компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто, и для любого $\varepsilon > 0$ оно покрывается конечным числом ε-шаров[3].

Выпуклая зоология точек. Точка $p = x_1q_1 + x_2q_2 + \cdots + x_mq_m \in \mathbb{R}^n$ с $x_i > 0$ и $\sum x_i = 1$ называется *выпуклой комбинацией* точек $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Фигура Φ называется *выпуклой*, если она содержит все выпуклые комбинации любых своих точек. Пересечение всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру Φ, называется выпуклой оболочкой фигуры Φ и обозначается $\operatorname{conv}\Phi$. Непустое пересечение выпуклой фигуры Φ с какой-нибудь аффинной гиперплоскостью $\xi(x) = a$, такой что вся фигура Φ целиком содержится в полупространстве $\xi(x) \geqslant a$, называется *гранью* Φ, а аффинный функционал $\xi(x) - a$ и задаваемая им гиперплоскость называются в этом случае *опорными* для Φ. Размерность грани — это размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Нульмерные грани фигуры Φ называются её *вершинами*. Точка $p \in \Phi$ называется *крайней*, если она не является внутренней точкой никакого содержащегося в Φ отрезка.

Г6◇13°. Покажите, что выпуклая комбинация выпуклых комбинаций является выпуклой комбинацией исходных точек, и выведите отсюда, что для выпуклости фигуры необходимо и достаточно, чтобы она вместе с каждыми двумя точками содержала и соединяющий их отрезок.

Г6◇14° (симплекс). Проверьте, что выпуклая оболочка $[p_0, p_1, \ldots, p_n]$ любого набора не лежащих в одной гиперплоскости точек $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность, а его граница является объединением всевозможных симплексов вида $[p_{\nu_1},\, p_{\nu_2},\, \ldots,\, p_{\nu_m}]$ с $m < n+1$ и $\nu_i \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, n\}$.

Г6◇15* (лемма Каратеодори). Каждая точка из выпуклой оболочки произвольной фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклой комбинацией не более $(n+1)$ точек фигуры Φ.

Г6◇16°. Покажите, что **а)** замыкание **б)** внутренность выпуклой фигуры выпуклы.

Г6◇17°. Приведите пример замкнутой фигуры с непустой внутренностью, замыкание которой отлично от самой фигуры. Возможно ли такое, если фигура выпукла?

Г6◇18°. Покажите, что замкнутая выпуклая фигура является пересечением содержащих её полупространств.

Г6◇19. Верно ли, что у каждой замкнутой выпуклой фигуры

а) грань грани является гранью самой фигуры

б) крайняя точка грани является крайней точкой самой фигуры

в) все вершины являются крайними точками

г) все крайние точки являются вершинами.

Г6◇20. Покажите, что замкнутая ограниченная выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Г6◇21* (лемма Радона). Любой конечное множество из $\geqslant (n+2)$ различных точек в $\mathbb{R}^n$ всегда можно разбить в дизъюнктное объединение двух непустых подмножеств с пересекающимися выпуклыми оболочками.

Г6◇22* (теорема Хелли). Если в наборе замкнутых выпуклых фигур в $\mathbb{R}^n$ имеется хоть одна компактная и каждый поднабор из $(n+1)$ фигур имеет непустое пересечение, то и весь набор имеет непустое пересечение.

---

[2] замкнутыми в которой являются пересечения этого подмножества со всевозможными замкнутыми подмножествами объемлющего пространства

[3] про такие множества говорят, что они *вполне ограничены*, ибо это *более сильное* условие, чем ограниченность