

Выпуклые многогранные конусы и многогранники

Г7◇1°. Нарисуйте ограниченное замкнутое выпуклое множество с незамкнутым множеством
 а) вершин б) крайних точек.

Терминология и обозначения. ВМК (выпуклый многогранный конус) на векторах v_1, v_2, \dots, v_m это множество векторов $\sigma = \{ \sum \lambda_i v_i \mid \forall i \lambda_i \geq 0 \}$ в векторном пространстве $V \simeq \mathbb{R}^n$. По определению, двойственный конус к σ — это множество ковекторов $\sigma^\vee = \{ \xi \in V^* \mid \forall v \in \sigma \xi(v) \geq 0 \} \subset V^*$. Пересечения $\sigma \cap \text{Ann}(\xi)$, где $\xi \in \sigma^\vee$, называются *гранями* σ . Грани, отличные от σ , называются *собственными*. Под *размерностью* σ понимается размерность его линейной оболочки. Грани коразмерности 1 называются *гипергранями*. Для гиперграни τ n -мерного ВМК σ мы обозначаем через $\xi_\tau \in \sigma^\vee$ базисный вектор в $\text{Ann} \tau$.

Г7◇2°. Покажите, что для любого ВМК σ и любого вектора $w \notin \sigma$ существует $\xi \in \sigma^\vee$ с $\xi(w) < 0$.

Г7◇3°. Покажите, что $\sigma = \{ v \in V \mid \xi(v) \geq 0 \ \forall \xi \in \sigma^\vee \}$.

Г7◇4°. Покажите, что грани σ суть ВМК и что грань грани и пересечение граней суть грани σ .

Г7◇5. Докажите эквивалентность друг другу следующих условий на ВМК σ :

- а) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ б) σ^\vee линейно порождает V^* в) $\exists \xi \in \sigma^\vee : \sigma \cap \text{Ann}(\xi) = \{0\}$
- г) σ не содержит ненулевых векторных подпространств из V .

Г7◇6. Покажите, что минимальная по включению грань σ есть $\sigma \cap (-\sigma)$.

Г7◇7. Докажите эквивалентность друг другу следующих условий на ВМК σ и вектор $v \in \sigma$:

- а) $\forall \xi \in \sigma^\vee \setminus \text{Ann}(\sigma) \ \xi(v) > 0$ б) v внутренняя точка (в топологии линейной оболочки) σ
- в) $\forall w \in \sigma \exists u \in \sigma : u + w = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ г) $\sigma^\vee \cap \text{Ann}(v) = \text{Ann}(\sigma)$
- д) линейная оболочка σ есть $\{ w - \lambda v \mid w \in \sigma, \lambda \geq 0 \}$.

Г7◇8. Верно ли что σ и σ^\vee имеют одинаковое число одномерных граней?

Г7◇9°. Покажите, что выпуклое подмножество $\eta \subset \sigma$ является гранью тогда и только тогда, когда $\forall v_1, v_2 \in \sigma \ v_1 + v_2 \in \eta \iff v_1, v_2 \in \eta$.

Г7◇10°. Покажите, что любая собственная грань $\tau \subset \sigma$ а) содержится в некой гиперграни σ
 б) является пересечением всех содержащих её гиперграней σ .

Г7◇11°. Если $\sigma \neq V$ линейно порождает V , то а) $\partial \sigma$ является объединением гиперграней
 б) ковекторы $\xi_\tau \in V^*$, задающие гиперграни $\sigma \subset \tau$, содержатся в следующем конечном множестве M : перебираем все линейно независимые наборы из $(n - 1)$ векторов v_i ; для каждого из них находим $\xi \in V^*$, порождающий его аннулятор; если ξ или $-\xi$ неотрицателен на всех v_i , включаем его (с нужным знаком) в M , если нет — то нет
 в) $\sigma = \bigcap_{\tau} H_{\xi_\tau}^+$, где $\tau \subset \sigma$ пробегает все гиперграни σ г) σ^\vee тоже является ВМК.

Г7◇12. Покажите, что сопоставление грани $\tau \subset \sigma$ множества $\text{Ann}(\tau) \cap \sigma^\vee \subset \sigma^\vee$ корректно задаёт обращающую включения биекцию между гранями σ и σ^\vee .

Г7◇13. Пусть $\xi \in \sigma^\vee$ и $\tau = \text{Ann}(\xi) \cap \sigma$. Верно ли, что $\tau^\vee = \{ \zeta - \lambda \xi \mid \zeta \in \sigma^\vee, \lambda \geq 0 \}$?

Г7◇14. Пусть ВМК σ_1 и σ_2 пересекаются по общей грани τ . Верно ли, что $\tau = \sigma_1 \cap \text{Ann}(\xi) = \sigma_2 \cap \text{Ann}(\xi)$ для некоторого $\xi \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee$?

Г7◇15. Обозначим через $W \subset V$ линейную оболочку грани τ ВМК $\sigma \subset V$. Покажите, что $\sigma + W$ является ВМК в фактор пространстве V/W , причём его грани — это в точности $\eta + W$, где η пробегает все содержащие τ грани σ .

Г7◇16°. Пусть $M \subset \mathbb{A}(V)$ — произвольный выпуклый многогранник, и $\xi \in V^*$. Верно ли, что:

- а) ВМК с вершиной в любой вершине M , натянутый на все выходящие из этой вершины рёбра M , содержит M
- б) из любой вершины M можно пройти в любую другую, двигаясь только по рёбрам
- в) если ξ ограничен на M , то $\max_{x \in M} \xi(x)$ достигается в некоторой вершине M
- г) для того, чтобы ξ достигал своего максимума на M в вершине $p \in M$, необходимо и достаточно, чтобы ξ не увеличивал своё значение вдоль всех выходящих из p рёбер M .