Выпуклые многогранные конусы и многогранники

Г7◇1°. Нарисуйте ограниченное замкнутое выпуклое множество с незамкнутым множеством **а)** вершин **б)** крайних точек.

Терминология и обозначения. ВМК (*выпуклый многогранный конус*) на векторах $v_1, v_2, \dots, v_m$ это множество векторов $\sigma = \{\sum \lambda_i v_i \mid \forall\, i\ \lambda_i \geqslant 0\}$ в векторном пространстве $V \simeq \mathbb{R}^n$. По определению, *двойственный конус* к σ — это множество ковекторов $\sigma^\vee = \{\xi \in V^* \mid \forall\, v \in \sigma\ \xi(v) \geqslant 0\} \subset V^*$. Пересечения $\sigma \cap \operatorname{Ann}(\xi)$, где $\xi \in \sigma^\vee$, называются *гранями* σ. Грани, отличные от σ, называются *собственными*. Под *размерностью* σ понимается размерность его линейной оболочки. Грани коразмерности 1 называются *гипергранями*. Для гиперграни τ n-мерного ВМК σ мы обозначаем через $\xi_\tau \in \sigma^\vee$ базисный вектор в $\operatorname{Ann}\tau$.

Г7◇2°. Покажите, что для любого ВМК σ и любого вектора $w \notin \sigma$ существует $\xi \in \sigma^\vee$ с $\xi(w) < 0$.

Г7◇3°. Покажите, что $\sigma = \{v \in V \mid \xi(v) \geqslant 0\ \ \forall\, \xi \in \sigma^\vee\}$.

Г7◇4°. Покажите, что грани σ суть ВМК и что грань грани и пересечение граней суть грани σ.

Г7◇5. Докажите эквивалентность друг другу следующих условий на ВМК σ:
а) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ **б)** $\sigma^\vee$ линейно порождает V^* **в)** $\exists\, \xi \in \sigma^\vee : \sigma \cap \operatorname{Ann}(\xi) = \{0\}$
г) σ не содержит ненулевых векторных подпространств из V.

Г7◇6. Покажите, что минимальная по включению грань σ есть $\sigma \cap (-\sigma)$.

Г7◇7. Докажите эквивалентность друг другу следующих условий на ВМК σ и вектор $v \in \sigma$:
а) $\forall\, \xi \in \sigma^\vee \setminus \operatorname{Ann}(\sigma)\ \xi(v) > 0$ **б)** v внутренняя точка (в топологии линейной оболочки) σ
в) $\forall\, w \in \sigma\ \exists\, u \in \sigma : u + w = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ **г)** $\sigma^\vee \cap \operatorname{Ann}(v) = \operatorname{Ann}(\sigma)$
д) линейная оболочка σ есть $\{w - \lambda v \mid w \in \sigma,\ \lambda \geqslant 0\}$.

Г7◇8. Верно ли что σ и $\sigma^\vee$ имеют одинаковое число одномерных граней?

Г7◇9°. Покажите, что выпуклое подмножество $\eta \subset \sigma$ является гранью тогда и только тогда, когда $\forall\ v_1, v_2 \in \sigma\ v_1 + v_2 \in \eta \iff v_1, v_2 \in \eta$.

Г7◇10°. Покажите, что любая собственная грань $\tau \subset \sigma$ **а)** содержится в некой гиперграни σ
б) является пересечением всех содержащих её гиперграней σ.

Г7◇11°. Если $\sigma \neq V$ линейно порождает V, то **а)** $\partial\sigma$ является объединением гиперграней
б) ковекторы $\xi_\tau \in V^*$, задающие гиперграни $\sigma \subset \tau$, содержатся в следующем конечном множестве M: перебираем все линейно независимые наборы из $(n-1)$ векторов v_ν; для каждого из них находим $\xi \in V^*$, порождающий его аннулятор; если ξ или $-\xi$ неотрицателен на всех v_i, включаем его (с нужным знаком) в M, если нет — то нет
в) $\sigma = \bigcap\limits_\tau H^+_{\xi_\tau}$, где $\tau \subset \sigma$ пробегает все гиперграни σ **г)** $\sigma^\vee$ тоже является ВМК.

Г7◇12. Покажите, что сопоставление грани $\tau \subset \sigma$ множества $\operatorname{Ann}(\tau) \cap \sigma^\vee \subset \sigma^\vee$ корректно задаёт обращающую включения биекцию между гранями σ и $\sigma^\vee$.

Г7◇13. Пусть $\xi \in \sigma^\vee$ и $\tau = \operatorname{Ann}(\xi) \cap \sigma$. Верно ли, что $\tau^\vee = \{\zeta - \lambda\xi \mid \zeta \in \sigma^\vee,\ \lambda \geqslant 0\}$?

Г7◇14. Пусть ВМК σ_1 и σ_2 пересекаются по общей грани τ. Верно ли, что $\tau = \sigma_1 \cap \operatorname{Ann}(\xi) = \sigma_2 \cap \operatorname{Ann}(\xi)$ для некоторого $\xi \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee$?

Г7◇15. Обозначим через $W \subset V$ линейную оболочку грани τ ВМК $\sigma \subset V$. Покажите, что $\sigma + W$ является ВМК в фактор пространстве V/W, причём его грани — это в точности $\eta + W$, где η пробегает все содержащие τ грани σ .

Г7◇16°. Пусть $M \subset \mathbb{A}(V)$ — произвольный выпуклый многогранник, и $\xi \in V^*$. Верно ли, что:
а) ВМК с вершиной в любой вершине M, натянутый на все выходящие из этой вершины рёбра M, содержит M
б) из любой вершины M можно пройти в любую другую, двигаясь только по рёбрам
в) если ξ ограничен на M, то $\max\limits_{x \in M} \xi(x)$ достигается в некоторой вершине M
г) для того, чтобы ξ достигал своего максимума на M в вершине $p \in M$, необходимо и достаточно, чтобы ξ не увеличивал своё значение вдоль всех выходящих из p рёбер M.